# 623. 相對幾何雜話

松村　宗治（台北大）

（I）相等的距離 $d$ ニ對シテハ Süss 氏ノ論文記号ヲ採用シテ

(1) $$d=\sqrt{q_1 q_2(\xi_1-\xi_2)^2}$$

ガ成立ツ、記号ハ普通ノ通リデアル。

今 $d$ ヲ変形スルタメニ $q_1, q_2$ ノ比例中項ヲ $q_{12}$ トスレバ (1) ハ

(2) $$d=\sqrt{q_{12}^2(\xi_1-\xi_2)^2}$$

トナル、(2) ハ

(3) $$d^2=q_{12}^2(\xi_1-\xi_2)^2$$

即チ

(4) $$d=\varepsilon q_{12}(\xi_1-\xi_2)$$

トナル、コヽニ $\varepsilon$ ハ $\pm 1$ デアル。

(4) ハ $d$ ニ對スル一ツノ表式デアル。

又 (1) ヨリ

$$(5)\qquad \frac{q_1(z_1-z_2)}{d}=\frac{d}{q_2(z_1-z_2)}$$

ツマリ $d$ ハ $q_1(z_1-z_2)$, $q_2(z_1-z_2)$ ノ比例中項デアル。

$P_i(z_i)$, $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ 及ビ $P_0(z_0)$ ヲバ相異ナル卵形線上ノ点トシ, $q_K$, $(K=0,1,2,\cdots\cdots,n)$ ヲバ基本卵形線ノソレ等ノ点ニ對スル *Supporting lines* ノ函数トシ

$$(6)\qquad \sum d = Mini.$$

ナル様ニセンニハ

$$(7)\qquad \sum_{1}^{n} q_0 q_i (z_0-z_i)^2 = Mini.$$

トセバ可ナリ、サテ $z_i$ ハ與ヘラレタリトシ (7) ヲ充ス様ニ $z_0$ ヲ求メンニハ (7) ヨリ求メルトヨイ。

(II) 相對的弧 $\widehat{a}$ ノ長サハ

$$(8)\qquad \widehat{a}=q_{12}\left\{\widehat{z_1,\ z_2}\right\}$$

デアルコトが (3) カラ分ル。

コヽニ $\left\{\widehat{z_1,\ z_2}\right\}$ ハ点 $z_1$ ト $z_2$ ノ間ノ弧ノ長サデアル。

(III) 従ツテ相對的周囲モ計算出來ル。

(IV) 次ニ相對的弧ノ長サが一定ノトキニ相對的弦が亦同時ニ一定ナルモノハ何カトイフニ上ノ計算ヨリ普通ノ弧ノ長サ一定ニシテ同時ニ普通ノ弦が一定トナルカラ普通

ノ円ニナル。

(V) 曲線 $\mathfrak{x}$ ヲバ変ヘナイデ基本卵形線 $\mathfrak{M}$ ヲカヘルト相對的距離 $\bar{d}$ ハ次ノ様ニナル。

$$(9)\qquad \bar{d} = \sqrt{Q_1 Q_2 (\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2)^2}$$

ソコデ (1), (9) ヨリ

$$(10)\qquad \frac{d^2}{\bar{d}^2} = \frac{q_1\, q_2}{Q_1\, Q_2}$$

デアル、ツマリ (10) ニヨリ相對的距離ノ平方ノ比ガ分ル。

(VI) $\mathfrak{y} = \mathfrak{x} + \rho\,\bar{\xi}_2$ ナル点ヲ考ヘ、コレヲ A 中心ト名ヅケル。

サテ $\mathfrak{x}$ ヘノ切線ヘ A 中心カラノ距離ヲ $p$ トセバ

$$r = \frac{p}{q} = \frac{((\mathfrak{y}-\mathfrak{x})\bar{\xi}_2)}{q} = \frac{\rho(\bar{\xi}_2\bar{\xi}_2)}{q} = \frac{\rho}{q}$$

トナル。

コヽニ $\bar{\xi}_2$ ハ *normal* ノ方向ヘノ *unit vector* デアリ、$r$ ハ *R.-Abstand*, $q$ ハ $\mathfrak{M}$ 曲線上ノ對應点ニ於ケル切線ヘ原点ヨリノ垂直距離デアルコトハ普通ノ通リデアル。

(VII) $\mathfrak{x}_1$ ト $\mathfrak{x}_2$ トノ間ノ相對的距離ガ一定ナラバ

$$\mathfrak{x}_1 - \mathfrak{x}_2 = \pm \frac{const.}{\sqrt{q_1 q_2}}$$

デアル。ツマリ $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2$ ハ相對的平行曲線トスル。

ソレ故ニ $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ ヲ頂点トスル三角形ノ面積 $f$ ハ次ノ様ニナル。

$$f = \frac{1}{2} \sin \omega \left( \frac{const.}{\sqrt{g(z)\,g(x)}},\ \frac{const.}{\sqrt{g(y)\,g(x)}} \right)$$

コヽニ $g(t)$ ハ $t$ 点ニ對應スル点ニ相當スル $g$ ノ値デアリ，$\omega$ ハニツノ座標軸ノ間ノ角デアル。

尚，行列式

$$\begin{vmatrix} z_1 - x_1 & z_2 - x_2 \\ y_1 - x_1 & y_2 - x_2 \end{vmatrix}$$

ヲバ

$$( z - x,\ \ y - x )$$

デ表ハシタ。

(VIII) $S$ ヲ r-curve length トシ一点 $\mathfrak{x}_0 = \overline{\mathfrak{x}}_0$ デ交ハルニツノ曲線 C, $\overline{C}$ ヲ考ヘル、而シテコノ曲線ヲバ

$$\mathfrak{x}(S) = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_0' S + \frac{\mathfrak{x}_0''}{\lfloor 2} S^2 + \cdots\cdots,$$

$$\overline{\mathfrak{x}}(S) = \overline{\mathfrak{x}}_0 + \overline{\mathfrak{x}}_0' S + \frac{\overline{\mathfrak{x}}_0''}{\lfloor 2} S^2 + \cdots\cdots$$

トスル、此ニ曲線ガ相對的空間デ $\mathfrak{x}_0$ デ $n$ 次ノ切触ヲナス爲メノ條件ハ

$$\mathfrak{x}_0' = \overline{\mathfrak{x}}_0',\ \cdots\cdots,\ \mathfrak{x}_0^{(n-1)} = \overline{\mathfrak{x}}_0^{(n-1)},\quad \mathfrak{x}_0^{(n)} \neq \overline{\mathfrak{x}}_0^{(n)},\quad (n > 1)$$

デアル。

亦相對的空間デ $\overline{C}$ ニ對スル抛物線ノ一般式ハ明ニ

$$\overline{\mathfrak{x}} = \overline{\mathfrak{x}}_0 + \overline{\mathfrak{x}}_0' S + \overline{\mathfrak{x}}_0'' \frac{S^2}{2}$$

デアル。

今特ニ曲線 $C$

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_0' S + \mathfrak{x}_0'' \frac{S^2}{2} + \cdots\cdots$$

ト点 $\mathfrak{x}_0$ デ少クトモ三次ノ切觸ヲナスヤウナ拋物線ヲ考ヘレバコノ様ナ拋物線 $\overline{C}$ ハ唯一ツ存在スル。

コノトキ $\overline{C}$ ノ式ハ

$$\overline{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_0' S + \mathfrak{x}_0'' \frac{S^2}{2}$$

デアツテコレヲ $\mathfrak{x}_0$ ニ於ケル $C$ ノ切触拋物線トイフコトハ普通ノ微分幾何ニ於ケルガ如シ。

尚進ンデ普通ノ微分幾何ニ於ケル此ノ方面ノ研究ニ相似ノ研究ニシテ然モ相對微分幾何學上有益ナル研究ハ如何。