622. 超越直径ト Koebe ノ定理

（早田氏ノ問題ニ答ヘテ）

井上　正雄（阪大）

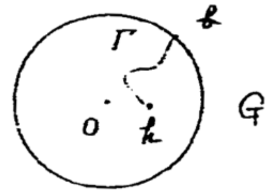
本誌第 138 号 613 ニオイテ早田氏ニヨッテ考察サレタ問題ニ解答ヲ与ヘ、且ツソレニ関聯シテ超越直径ト Koebe ノ定理トノ関係ニツイテ二三ノ考察ヲナシタイ。

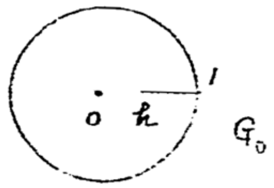
談話ニオイテ氏ハ次ノコトヲ豫想サレタ。

「ζ 平面上ノ単位円ヲ D トシ，$\zeta = r$（r 実数，$0 < r < 1$）ナル一点ヲ固定スル。

r ト円周上ノ任意ノ点 $e^{i\theta}$ トヲ原点ヲ通ラナイ単一 Jordan 曲線 Γ ニテ結ビ，D ニコノ曲線ニ沿ッテ Schlitz ヲ

入レタ領域ヲGトスル。Gヲz平面上ノ単位円$|z|<1$ニ等角ニ寫像スル函数ヲ$f(\zeta)=z$，Dニ実軸$h<\zeta<1$ノ部分ニSchlitzヲ入レタ領域ヲG_0トシテG_0ヲ$|z|<1$ニ等角ニ寫像スル函数ヲ$g(\zeta)=z$トスル。但シ$f(0)=0$。$g(0)=0$。





シカルトキ，次ノ不等式ガ成立シ

$$|f'(0)| \geqq |g'(0)| \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

等号ハΓガ単位円ニ對シテ直交スル円弧ナル場合ニ限ル。」

シカシナガラ，コノ問題ハ實ハ Koebe ノ定理ノ特別ノ場合ト考ヘルコトガ出来ル。[1)]

ソレニハ次ノヤウニ考ヘレバヨイ。

$|\zeta|<1$ヲ$\dfrac{(1+h)^2}{h}\cdot\dfrac{\zeta}{(1+\zeta)^2}=w$ナル函数ニヨッテ$w$平面ニ移セバ，ソノ Bildgebiet Δハw平面ニ$\dfrac{(1+h)^2}{4h}\leqq w\leqq\infty$ナル直線ニ沿ッテ Schlitz ヲ入レタ領域トナル。

コノ変換ニヨリ$\zeta=0$ハ$w=0$，

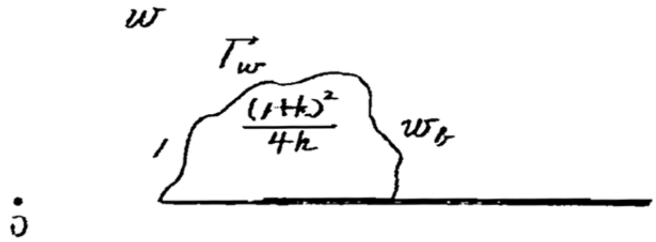
$$\zeta=h \text{ ハ } w=1,\quad \zeta=1 \text{ ハ } w=\frac{(1+h)^2}{4h}$$

---

1) 早田氏ハコノ逆ヲ意圖サレテイタカモ知レナイガ。

$\zeta = b$ ハ $w = \dfrac{(1+h)^2}{h} \cdot \dfrac{b}{(1+b)^2}$

$= w_b \ (>0)$



ニ移サレ Γ ハ $w=1$ ト

w_b トヲ結ブ曲線 Γ_w ニ移ルモノトスル。

シカラバ

$$\left(\frac{dz}{dw}\right)_{w=0} = \left(\frac{dz}{d\zeta}\right)_{\zeta=0} \left(\frac{d\zeta}{dw}\right)_{w=0}$$

シカルニ

$$\left(\frac{d\zeta}{dw}\right)_{w=0} = \frac{h}{(1+h)^2}$$ ナル故

$$\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|_{\zeta=0} = \frac{(1+h)^2}{h} \cdot \left|\frac{dz}{dw}\right|_{w=0}$$

Koebe ノ定理ニヨレバ $\left|\dfrac{dz}{dw}\right|_{w=0}$ ガ最小トナルトキハ Δ ハ $1 \leqq w \leqq \infty$ ニ沿ッテ Schlitz ノ入ッタ領域ノ場合デアリ又コノトキニ限ル。

故ニ $\left|\dfrac{dz}{d\zeta}\right|_{\zeta=0}$ ガ最小値トナルノハ Γ_w ガ $\left[1, \dfrac{(1+h)^2}{4h}\right]$ ヲ結ブ線分ニナルトキデアリコノトキニ限ル，即チ $b=1$ トナリ Γ ガ実軸ト一致スル場合ニ限ル。

シカモコノトキノ値ハ $\left|\dfrac{dz}{dw}\right|_{w=0} = \dfrac{1}{4}$ デアルカラ $\left|\dfrac{dz}{d\zeta}\right|_{\zeta=0} = \dfrac{(1+h)^2}{4h}$ デアル。

依ッテ不等式 $|f'(0)| \geqq |g'(0)|$ ハ常ニ成立シ，等号ハ Γ ガ実軸ニ一致スルトキニ限ル。

コレニヨレバ早田氏ノ等号ノ成立スルトキノ豫想ノ間違ヒデアルコトガ解ッタ。

シカラバ氏ノ計算ノ何処ニ缺点ガアッタカ？

ソノ誤謬ヲ角谷氏ハ次ノ如ク指摘サレタ。

「p. 113 ニヲイテ t 平面上ノ半径 1 ノ右半円ヲ

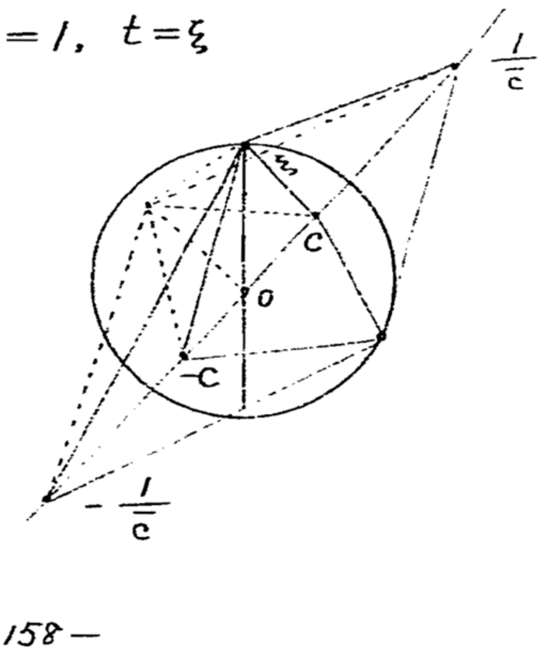
$t = c \longleftrightarrow z = 0$ ナル如ク単位円 $|z| < 1$ ニ等角ニ寫像スル函数ハ

$$z = -\frac{t-c}{1-\bar{c}t} \cdot \frac{1+\bar{c}t}{t+c}$$

ダト書カレテイルガ，コレハ間違ヒデアル。

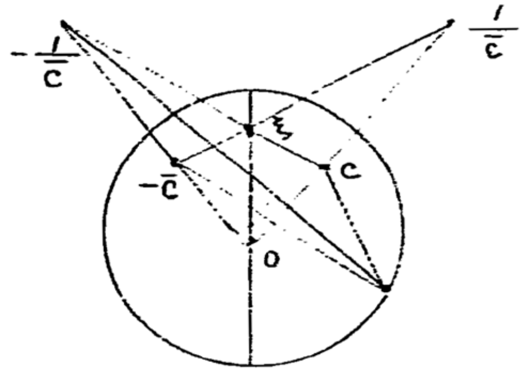
$t = \xi$ ガ円弧上ニアルトキハ確ニ $|z| = 1$ トナルガ虚軸上ニクルトソウハユカナイノデアル。何故ナラバ虚軸上ノスベテノ点デ $|z| = 1$ トナッタトスレバ

$$|z| = \left|\frac{t-c}{t+c}\right| \left|\frac{t+\frac{1}{\bar{c}}}{t-\frac{1}{\bar{c}}}\right| = 1, \quad t = \xi$$



シカルニ c ニ別断制限ガナイカラ之レヲ回轉シテ考ヘテモヤハリ虚軸上デ上式ガ成立スルコトカラ円内ノアラユル点デ上式ガ成立スルコトニナリ

矛盾デアル。($c=\bar{c}$ ナラバ コレデモヨイ)



シカラバ如何ニスレバヨイカト云フニ，$t=\xi$ が半円ノ周上ニアレバ常ニ

$$\left|\frac{t-c}{t+\bar{c}}\right|\left|\frac{t+\frac{1}{c}}{t-\frac{1}{\bar{c}}}\right|=1$$

トナルカラ $\zeta=\frac{t-c}{1-\bar{c}t}\cdot\frac{1+ct}{t+\bar{c}}$ ナル変換ヲトレバヨイコトが解ル。

コレニヨッテ計算スレバ

$$\left(\frac{dt}{dz}\right)_{z=0}=\frac{(c+\bar{c})(1-|c|^2)}{1-|c|^2}$$

トナリ

$$\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{z=0}=-\frac{2c(c+\bar{c})}{(1+h)^2}$$

トナル，但シ $c=\sqrt{h}e^{-i\theta}$

故ニ $\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|_{z=0}$ ノ最大値ハ $c=\bar{c}$ ノトキデアリ，コノトキニ限ル。

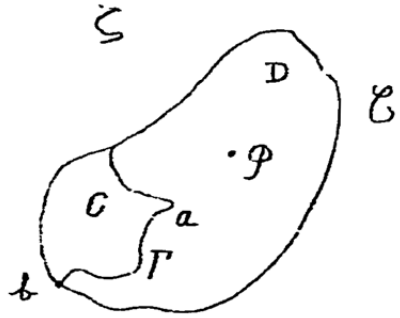
コノトキ $\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|_{z=0}=\frac{4h}{(1+h)^2}$ トナル。$c=\bar{c}$ ノトキハ $h=1$ ノトキニ他ナラナイ。」

次ニカヽル Abbildungsmodul ノ問題ハ超越直径ト深

キ関係ノアルコトハ勿論デアル。コノ超越直徑ヲ使ツテ一般ノ領域ノ場合ニ對スル前述ノ問題ヲ考ヘルコトニシヨウ。

一般ノ場合トハ

「ζ平面上ノ任意ノ單一連結ナ曲線$\mathfrak{C}$デ囲マレタ領域DノD内部ニ一点aヲ取リ，又$\mathfrak{C}$上ニ点bヲトル。更ニD内ニa以外ノ一点pヲトリaトbトヲD内デpヲ通ラナイ單一曲線Γデ結ビ，Dニ對シテΓニ沿ッテSchlitzヲ入レタ領域ヲGトスル。Gヲ他ノ平面ノ單位円内ニpヲ原点ニ移スガ如ク等角ニ寫像スル函数ノシテpニヲケルAbbildungsmodulノ最小ナ函数（或領域）ハ何カ？」



ト云フ問題デアル。

コレヲ考ヘルタメFeketeノ定理ヲ次ノ如ク書キ直ス。

定理（Fekete）

ζ，z両平面上ニζ_0，z_0ヲ夫々内点トシテ含ム單一連結領域[2]ヲG_ζ，G_zトシ，ζ_0ガz_0ニ對應スルヤウニG_ζヲG_zニ等角ニ寫像スル函数ヲ$f(\zeta)=z$トスレバ

$$\left|f'(\zeta_0)\right| = \frac{d(CT_{\zeta_0}G_\zeta)}{d(CT_{z_0}G_z)}$$

---

2) 以下スベテ單位円ニ等角寫像出來ル如キモノノミヲ考ヘル。

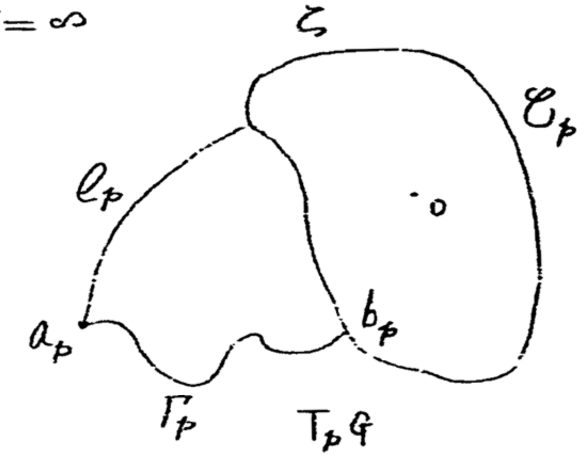
但シコヽニ $CT_{\zeta_0}G_\zeta$, $CT_{z_0}G_z$ ハ G_ζ, G_z ヲ夫々 $\frac{1}{\zeta-\zeta_0}$, $\frac{1}{z-z_0}$ ニテ変換シタ領域 $T_{\zeta_0}G_\zeta$, $T_{z_0}G_z$ ノ余集合（有界閉集合）ヲ表ハシ，d ハソノ超越直径ヲ示ス。

コノ定理ニヨレバ G ヲ単位円内ニ寫像スル函数ヲ $f(\zeta)=z$ トスレバ

$$|f'(p)|=d(CT_pG)$$

トナルカラ問題ハ $\frac{1}{\zeta-p}$ ナル変換ニヨツテ a ノ移ル点ヲ a_p トスルトキ，CT_pD ト a_p トヲ如何ナル曲線ニテ結ベバソノ超越直径ガ最小ニナルカト云フ問題ニ帰着スル（最初ノ問題ハ CT_pD ガ円トナル特殊ノ場合デアル）。

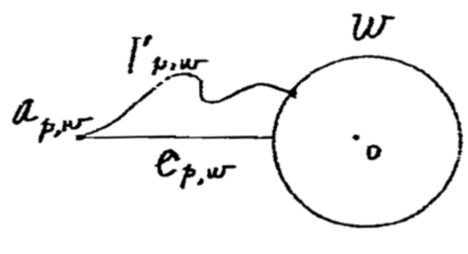
先ヅ T_pD ヲ $\zeta=\infty \leftrightarrow w=\infty$ ナルガ如ク $|w|>1$ ニ等角ニ寫像スル函数ヲ



$$\zeta=\tau w+\tau_0+\frac{\tau_1}{w}+\cdots,$$

$$\tau=d(CT_pD)$$

トシ a_p ノ Bild ヲ $a_{p,w}$, Γ_p ノ Bildkurve ヲ $\Gamma_{p,w}$ トシヤウ。



$|w|>1$ ニ $\Gamma_{p,w}$ ニ沿ッテ Schlitz ヲ入レタ領域ヲ $(T_pG)_w$ トシ，コレヲ $|z|>1$ ニ $\infty\leftrightarrow\infty$ ナルガ如ク等角ニ寫像スル函数ヲ

$$w = \lambda z + \lambda_0 + \frac{\lambda_1}{z} + \cdots\cdots, \qquad \lambda = d(C\langle T_p G)_w)$$

トシ，コレラヲ合成スレバ T_pG ヲ $|z| > 1$ ニ等角ニ寫像スル函数

$$\zeta = \lambda\tau z + C_0 + \frac{C_1}{z} + \cdots\cdots$$

ガ得ラレル。コヽニ

$$d(CT_pG) = \lambda\tau$$

デアル。

故ニ $d(CT_pG)$ ガ最小ニナルノハ λ ノ最小ニナルトキデアル。

處ガ既ニ解決シタ前述ノ問題ハ要スルニ「円ト外部ノ一点トヲ與ヘコレラヲ結ブ曲線ノウチ，ソノ集合ノ超越直径ノ最小トナルノハソノ点カラ最短距離ニアル点ヲ直線デ結ンダモノデアリ且ツコレニ限ル」ト云フト同ジデアルカラ $\Gamma_{p,w}$ ガコノ性質ヲ満足シテイル線分 $l_{p,w}$[3] ニ一致スルトキ限リ λ ガ最小トナル。故ニ $l_{p,w}$ ノ Urbild ヲ l_p トシ T_pD ニ l_p ニ沿ッテ Schlitz ヲ入レタ領域ヲ T_pG_0 トスルトキ

$l_p \neq \Gamma_p$ ナラバ $\quad d(CT_pG_0) < d(CT_pG)$[4]

コレデ問題ハ解決シタ。

---

3) ソノ点ト円ノ中心トヲ結ブ直線ニヨッテ外側デ結ンダモノデアル。

4) コノトキモ最短距離ノ点ヲ線分デ結ンダモノガ求メルモノニナルヤウナ氣ガスルガ実ハソウデナイコトガ解ッタノデアル。超越直径ノ面白イ一性質ト思フ。

元ヘ戻セバ l_p ヲ $\frac{1}{\zeta}+p$ デ変換シタ曲線ヲ l トスルトキ $D=l$ ニ沿ッテ Schlitz ヲ入レタ領域 G_0 ガ求メル領域デアリ，之レニ関スル寫像函数ノ Abbildungsmodul ガ最小ニナルノデアル。

次ニ再ビ特殊ナ場合ニ戻ッテ，前ハ Koebe ノ定理（トクニ extremalgebiet ニ関スル部分）ヲ使ッテ前述ノ問題ヲ解決シタノデアルガ (1) ナル不等式ダケナラバ別断Koebe ノ定理ヲソノマヽ使ハズトモ Fekete ノ定理カラ次ノ如ク証明スルコトガ出来ル。

問題ニヲケル寫像函数 $f(\zeta)$, $g(\zeta)$ ニ Fekete ノ定理ヲ應用スレバ不等式 (1) ハ

$$|f'(0)|=d(CT_0G)\geqq d(CT_0G_0)=|g'(0)| \cdots\cdots (1)'$$

トナル。

シカルニ超越直徑ハ又 Robin ノ常数ニモ等シイカラ，T_0G, T_0G_0 ニ関スル ∞ ヲ極トスル Green ノ函数ヲ夫々

$$\mathcal{G}(\zeta,\infty,T_0G)=\log|\zeta|+H_{T_0G}(\zeta)$$
$$\mathcal{G}(\zeta,\infty,T_0G_0)=\log|\zeta|+H_{T_0G_0}(\zeta)$$

トスルトキ

$$d(CT_0G)=e^{-H_{T_0G}(\infty)}$$
$$d(CT_0G_0)=e^{-H_{T_0G_0}(\infty)}$$

依ッテ不等式 (1)' ハ

$$H_{T_0G}(\infty)\leqq H_{T_0G_0}(\infty)$$

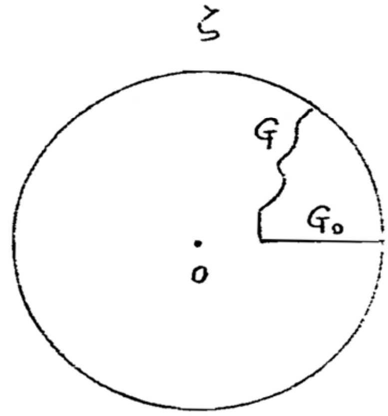
トナル。

更ニコノ不等式ハ G 及 G_0 ノ境界上ニテ $\log|\zeta|$ ナル値ヲトル G 及ビ G_0 内デノ調和函数ヲ夫々 $H_G(\zeta)$, $H_{G_0}(\zeta)$ トスルトキ

$$H_G(0) \leqq H_{G_0}(0) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)''$$

トナル。

シカルニ，コノ不等式ハ常ニ成立スル。



何故ナラバ $E_{G,0} \supseteq E_{G_0,0}$[5] デアルカラ良ク知ラレタ *majorante harmonique* ニ関スル定理[6]ニヨッテ

一般ニ　$H_G(\zeta) \leqq H_{G_0}(-|\zeta|)$

トクニ　$H_G(0) \leqq H_{G_0}(0)$

ヨッテ $(1)''$ 即チ (1) ナル不等式ハ常ニ成立スル。

尚又 *Fekete* ノ定理ヲ使ッテ談話 613 ニヲケル関係式 (2) ヲ証明スルコトモ出来ル。

即チ ζ 平面上ニ原点ヲ内点トシテ含ミ，$h(>0)$ ヲ境界点トシテ含ム単一連結領域[4]ヲ G，$\arg w = 0$, $|w| \geqq h$ ナル直線ニ沿ッテ ζ 平面ニ *Schlitz* ヲ入レタ領域ヲ G_h トシ，G 及ビ G_h ヲ $|z|<1$ ニ原点ガ互ニ対応スル如ク等角ニ写像スル函数ヲ夫々 $f(\zeta)$, $g(\zeta)$ トスレバ常ニ

---

5) $E_{G,0}$ ハ G ノ 0 ヲ原点トスル *projection* ヲ表ハス。本誌 136 号，603．p.52．

6) *Beurling: Etudes sur un prob. de maj.* p.45, p.52.

$$|f'(0)| \geqq |g'(0)| \quad \text{--------------------} \ (2)$$

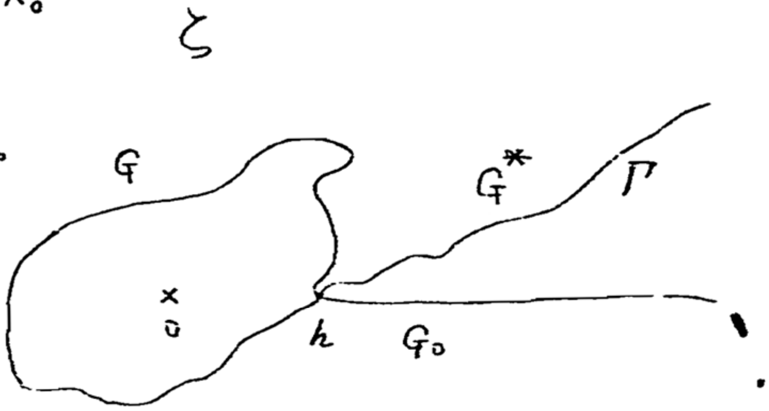
何故ナラバ,

h ヲ通リ ∞ マデ延ビル曲線 Γ ニテ ζ 平面ニ Schlitz ヲ入レタ領域ヲ G^* トス。

Γ ヲ適当ニトレバ

$G^* \supseteq G$ ナラシメ得ル。

G^* ニ関スル写像函数ヲ $g^*(\zeta)$ トスレバ G, G^* ニ定理ヲ使ヘバ



$$|f'(0)| \geqq |g^{*\prime}(0)|$$

更ニ G^*, G_h ニ定理ヲ應用スレバ

$$|g^{*\prime}(0)| = d(CT_0 G^*)$$

$$|g'(0)| = d(CT_0 G_0)$$

シカルニ有限ナル二点 $[a, b]$ ヲ結ブ任意ノ曲線ヲ l, 直線ヲ l_0 トスルトキ

$$d(l) \geqq d(l_0) \quad \text{--------------------} \ (3)$$

ナルコトガ容易ニ解ルカラ

$$d(CT_0 G^*) \geqq d(CT_0 G_0)$$

依ッテ

$$|f'(0)| \geqq |g^{*\prime}(0)| \geqq |g'(0)|$$

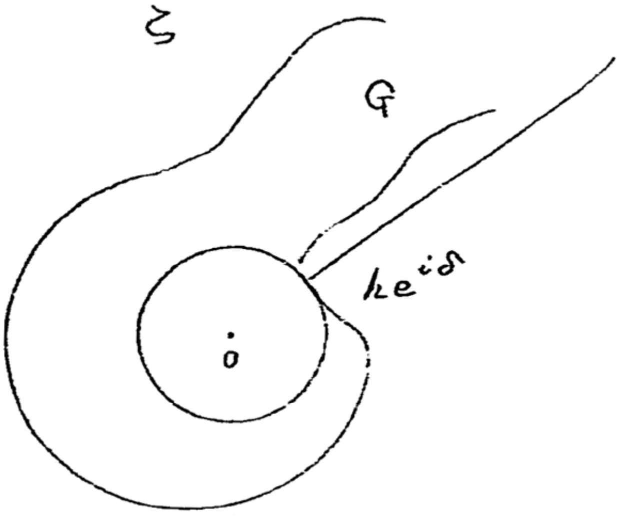
——(証明了)——

従ッテ, コノコトヲ使ヘバ既ニ指示サレタ通リ定理

"$f(\zeta) = Z = z + a_1 z + \cdots\cdots$ ヲ $|z|<1$ デ単葉ナ正則

函数トシ、コノ *Bildgebiet* ヲ G トスルトキ、G ハ原点ヲ中心トスル半径 $\frac{1}{4}$ ノ円ヲ含ム"

ヲ次ノ如ク証明スルコトが出來ル。



G ノ境界点ノウチ原点カラ最モ近クニアルモノノ一ツヲ $he^{i\delta}$ トスル。

ζ 平面ニ $\arg\zeta=\delta$, $|\zeta| \geqq h$ ナル直線ニ沿ッテ *Schlitz* ヲ入レタ領域ヲ G_h トシ、G_h ヲ原点ガ原点ニ移ル如ク $|z|<1$ ニ等角ニ寫像スル函数ヲ $\zeta=g(z)$ トスレバ、先ニ証明シタコトニヨリ

$$|g'(0)| = \frac{1}{d(CT_0G_h)} \geqq 1 = |f'(0)|$$

即チ　$1 \geqq d(CT_0G_h)$

シカルニ

$$d(CT_0G_h) = d\left(\left[0, \frac{1}{h}\right]\right) = \frac{1}{4h}$$ [7]

故ニ　$h \geqq \frac{1}{4}$

即チ半径 $\frac{1}{4}$ ノ円ヲ含ム。且ツ $G_{\frac{1}{4}}$ ヲ $|z|<1$ ニ等角ニ寫像スル函数ハ

$$\zeta = \frac{z}{(1+ze^{-i\delta})} = z + \cdots\cdots$$

---

7) 長サ m ナル線分ノ超越直径ハ $\frac{m}{4}$ デアル。

トナルカラ，$\frac{1}{4}$ハ extremal ナ値デアル。

——（証明了）——

シカシ以上ノ証明デハ Extremalgebiet ガ $G_{\frac{\delta}{4}}$（δハ任意）ニ限ルト云フコトハ証明サレテイナイ。コレガ証明出来ルタメニハ (3) ニヨイテ

$$l \neq l_0 \text{ ナラバ } \quad d(l) > d(l_0) \text{ .... } (4)$$

ガ成立スレバ充分デアルガ，コノ簡単ナル証明ガ思ヒツカナイ。

併シ一方ニヨイテ (4) ノ成立スルコトハ必要デモアル。何故ナラバ逆ニ Extremalgebiet ガ $G_{\frac{\delta}{4}}$ ニ限ルト云フコトヲ逆用スレバ (4) ノ成立スルコトガ解ルカラデアル。従ツテ (4) ヲ定理トシテ述ベルコトモ出来ルワケデアル。

以上ニヨッテ見レバ Koebe ノ定理ハ，要スルニ関係式 (4) 即チ有限ノ二点ヲ結ブ Kontinuum ノウチ超越直径ノ最小トナルノハ二点ヲ線分デ結ブトキデアリ且ツコノトキニ限ル —— ト同等デアル。

所ガ，前述ノ問題ハ円ト円外ノ一点トガアリ、ソレラ円外デ一ツノ Kontinuum デ結ブトキ，ソノ超越直径ノ最小トナルノハソノ点ト最短距離ノ点トヲ結ブトキデアリ且ツコノトキニ限ル[8] —— ト同等トナル。

---

8) カヽル超越直径ノ方カラ考ヘテモ早田氏ノ計算ノ間違ツテイタコトガ直ニ解ル。

何故ナラバ円ニ直交スル充分大ナル円弧ヲトレバソノ超越直径ヲシテ如何程デモ大ナラシメ得ルカラデアル。（角谷）

コノ立場ヨリスレバ (4) ハ後ノ場合ニヲイテ円ヲ点ニ収斂サセタ極限トモ考ヘ得ベク，従ッテ、ムシロ後ノ場合ヲ一般ト見ナシ得ルノデアリ，又コノコトハ p. 114 — p. 115 ニ於テ述ベラレテイル事項ノ意味ヲ説明スルモノデアロウ。