

## 621. 雜記 VI. 高階常微分方程式

南 雲 道 夫 (阪大)

### § 第 $n$ 階常微分方程式ノ境界値問題

I. 昨年本紙上ニ述ベタモノヲ再ビ茲ニ書クノデアアルガ、  
前ノトキ略シタ証明ハ行列式ノ計算ニヨルモノデアツタガ、

今度ハ行列式ノ計算ニヨラズニ線状微分方程式ノ解ニヨル補間法ノ考ヘニヨリ、モ少シ一般化シタ場合ノ計算ガ極簡單ニ行クコトヲ示シタイ。

例ニヨリ前ノ論文ヲ知ラナクトモヨク解ルマヨニ重複ヲ嫌ハズニ簡道ヲ説明シマウ。

第  $n$  階方程式

$$(1) \quad \frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right)$$

ニ於テ  $n$  個ノ点  $x = \alpha_i, y = \beta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )  
ヲ通ル解ノ存在ヲ研究スル方法トシテ、福原氏ガ Lagrange  
ノ 補間法ヲ利用スルコトニヨリ、之レヲ聯立一階微分方程  
式ノ (或ル種ノ) 境界値問題ニ變形シ得ルコトヲ述ベラレタ  
(岩波講座) 常微分方程式論 131 頁)。シカシ福原氏ハ  
コノ方法ヲ適當ナ形ニ利用サレズ、ソノ結果ニモ期待ヲ持  
タレズニ捨テラレタ (?) ノアルガ、之レハ次ノマヨニス  
レバ有效デアルト思フ。

今

$$(1) \quad \varphi_j(x) = \frac{\prod_{\lambda \neq j} (x - \alpha_\lambda)}{\prod_{\lambda \neq j} (\alpha_j - \alpha_\lambda)}$$

ト置ケバ、 $\sum_{j=1}^n \beta_j \varphi_j(x)$  ハ Lagrangeノ補間法 ( $n-1$   
次ノ多項式)デアアルガ、 $\beta_j$  (常数)ノ代リニ  $y_j$  (変数)  
トオキ

$$(H) \begin{cases} y = \sum_j \varphi_j(x) y_j \\ y' = \sum_j \varphi_j'(x) y_j \\ \dots \\ y^{(n-1)} = \sum_j \varphi_j^{(n-1)}(x) y_j \end{cases}$$

＋此変換＝ヨリ，(0)ヲ書キ改メレバ結局

$$(K_0) \begin{cases} \frac{d}{dx} y_j = \frac{(\alpha_j - x)^{n-1}}{(n-1)!} f(x, \sum_i \varphi_i y_i, \dots \\ \dots, \sum_i \varphi_i^{(n-1)} y_i) \\ (j = 1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

ナル聯立一階ノ方程式ニ移レ。ソコデコノ方程式ヲバ

$$y_j(\alpha_j) = \beta_j \quad (j = 1, \dots, n)$$

ナル條件デ解クコト元ノ問題ハ同等ニナツタ。(前ノ論文ノ計算ハ結果ガ少シ違ツタヨウデアス)。証明ハアトデシマス。

II. 扱テ茲ニ先ヅ問題トスルノハ，変換(H)＝ヨリ(0)カテ(K<sub>0</sub>)ヲ導キ出ス証明デアアル。コレハ行列式ノ計算カテモ出來ルガ，アマリ簡單デナイ。ソレヨリニ Lagrangeノ補間法(n-1次ノPolynom)ヲ拡張シテ，或ルn階線狀微分方程式

$$L(u) = \frac{d^n u}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \dots \\ \dots + p_n(x) u = 0$$

ノ解  $\varphi_j(x)$  ( $j=1, 2, \dots, n$ ) = ヲ  $\forall \epsilon \in \mathbb{R}$  ノ トシテ (H) ヲ考  
ヘレバ,  $(K_0)$  ノ 代リ =  $(\varphi_j(\alpha_i) = 0, i \neq j, \varphi_j(\alpha_j) = 1$   
トス)

$$(K) \begin{cases} \frac{dy_j}{dx} = \chi(\alpha_j, x) \left\{ f(\cdot) - \sum_i \varphi_i^{(n)} y_i \right\} \\ f(\cdot) = f(x, \sum_i \varphi_i y_i, \dots, \sum_i \varphi_i^{(n-1)} y_i) \\ (j=1, 2, \dots, n) \end{cases}$$

ヲ得ル. 但シ  $\chi(x, \xi)$  ハ  $x = \xi =$  於テ

$$\chi(\xi, \xi) = \chi'(\xi, \xi) = \dots = \chi^{(n-2)}(\xi, \xi) = 0,$$

$$\chi^{(n-1)}(\xi, \xi) = 1$$

ナル  $L(u) = 0$  ノ 解 (中野氏ノ *Charakteristische Lösung*) ヲ得ル。

特ニ  $L(u) = \frac{d^n u}{dx^n}$  ナル場合ガ丁度 *Lagrange* ノ

補間法ノ場合ニ相當シテ,

$$\chi(\alpha_j, x) = \frac{(\alpha_j - x)^{n-1}}{(n-1)!}$$

トナルヲ得ル。

コトニ必要ナルコトハ  $L(u) = 0$  ノ 積ルニヨリ補間法ガ  
可能ナルコトガアル。之レハ中野氏ノ所謂 *Volleigentlich-*  
*keit* ノ問題ガアル。シカシコトデハ應用上  $L(u)$  ハ  $\frac{d^n u}{dx^n}$   
ノ如ク簡單ナル性質ノヨク知レタモノヲ用ヒルコトヲ主眼トシ、  
 $L(u)$  ノ *Volleigentlichkeit* 云々ニハ立チ入ラズニ置

クコトトスル。

III. イヨイヨ証明 = 入ル。先ヅ  $(H) =$  於テ  $\varphi_j(x)$  ハ  
 一次的独立ナルカラ、 $y_j$  ノ係數  $\varphi_j(x), \varphi_j'(x), \dots$   
 $\dots, \varphi_j^{(n-1)}(x)$  ノ作ル行列式 (Wronskian トナル)  
 ハ  $0 =$  ナラヌ。

今  $y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}$  が順次 = ソノ前ノ  
 ノヲ微分シテモノナル = ヨリ、 $(H)$  ト  $(0)$  トカラ順次 =

$$(H') \left\{ \begin{array}{l} \sum_j \varphi_j(x) y_j' = 0 \\ \sum_j \varphi_j'(x) y_j' = 0 \\ \dots \\ \sum_j \varphi_j^{(n-2)}(x) y_j' = 0 \\ \sum_j \varphi_j^{(n-1)}(x) y_j' = f(x) - \sum_j \varphi_j^{(n)}(x) y_j \end{array} \right.$$

ヲ得ル。又逆 =  $y = \sum_j \varphi_j(x) y_j$  トオケバ  $(H') =$  ヨリ  $(H)$   
 ト  $(0)$  トヲ得ル。

次 =  $(H')$  ヲ  $y_j' =$  ツイテ解ケバヨイノナル。所ガ  
 $(H') =$  於テ  $x = \xi$  トオキ  $y_j'(\xi) = c_j$ ,  $u = \sum c_j \varphi_j(x)$   
 トスレバ、 $u(x)$  ハ  $L(u) = 0$  ノ解ヲ  $(H') =$  ヨリ

$$u(\xi) = u'(\xi) = \dots = u^{(n-2)}(\xi) = 0,$$

$$u^{(n-1)}(\xi) = (f - \sum \varphi_j^{(n)} y_j)_{\xi}.$$

故 =  $u(x) = \mathcal{N}(x, \xi) \left\{ f - \sum \varphi_j^{(n)} y_j \right\}_{\xi}.$

シカル = 又補間法 = ヨリ  $u(x_j) = c_j = y_j'(\xi)$ . ヲコテ

$x = \alpha_j$  トシテノ代リ =  $x$  トカケバ

$$y_j'(x) = \chi(\alpha_j, x) \left\{ f - \sum_i p_i^{(n)}(x) y_i \right\} \quad (\text{証明了})$$

IV. 以上ノ方法 = 於テハ形式的ナ計算バカリデアアルカラ (大小関係ガナイ) 変数ハ実数デモ複素数デモヨイ、ノミナラズ  $y$  ノ値ハ *Vektor* デモ差支ヘナイ。

(O) ガ (H) ノ変換デ (K) トナツテカラハ、福原氏ノ考ヘ = ヨリ (K) ヲ積分ノ形ニ書イテ

$$(T) \quad y_j = \beta_j + \int_{\alpha_j}^x \chi(\alpha_j, t) \left\{ f(t) - \sum_i p_i^{(n)}(t) y_i \right\} dt.$$

之 = 函数空間 = 於ケル不動点ノ定理ヲ適用スルコト = ヨリ解ノ存在定理ガ得ラレル。(岩波講座, 常微分方程式論 125 頁 定理 27 参照。但シ之 = ハ一般ノ不動点ノ定理ガ述べテナク、又ソノ証明ニ略シテアル)

不動点ノ定理トハ (有限次元ノ空間ノ場合), 有界デ凸ト閉集合  $M$  ガ連続函数  $f = \text{ヨリ } M$  ノ部分集合  $M' = f(M)$  = 寫像サレルトキ, 寫像ノ前後ガ一致スル点  $F \in M$ , 即チ  $F = f(F)$  ナル  $F$  ガ存在スルコトヲ云フ。ソノ証明ハ

B. Knaster, C. Kuratowski, S. Mazurkiewicz ノ共同論文 *Fundamenta Math.* XIV. (132 頁—137 頁) = ヨル、ガ一番好都合デアラウ (位相幾何學ノ門外漢デアアル我々 = トツテ)

次 = 上ノ不動点ノ定理ヲバ函数空間 (函数ヲ要素トスル集合, ソレ = 屬スル各要素ヲ点ト呼ブ) 或ハ之レヲ抽象化シ

又線状距離空間 = 拡張シテ次ノ定理が成立スル。

有界デ凸ナ閉集合  $M$  が過連続 (vollstetig) ナ寫像 (運算)  $f = \text{ヨリ } M$  ノ部分集合  $M' = f(M) = \text{寫像ナレ}$ ル時  $F = f(F) \in M$  ナル点  $F$  が存在スル。

但シ過連続トハ空間内ノ任意ノ有界集合ヲハ緊集合 (無限部分集合が必ず集積点ヲモツ集合) = 移スヤウナ連続性ヲ云フ。例ハバ積分ノ如キ運算ハ函数空間 = 於ケル過連続ナ運算デアアル。

有元次元ノ次元数ヲ増スコト = ヨリ近似法ガ函数空間 (或ハ線状距離空間) = 於ケル不動点ノ定理が証明出来ル。 *Studia Math.* 2 (171頁—180頁) = 於ケル *J. Schauder* ノ論文参照。尚ホ *Tychonoff* ノ論文 *Math. Annalen* 111 (767頁—) = アル証明ハ簡潔 (抽象的デアアルガ) デアル (帰謬法 = ヨル)。但シ同論文内ノ *Anwendung* ハ不自然ヲ感心出来ナイ。

扱テコノ不動点ノ定理ヲコト = 適用スレバ

“  $y_i(x)$  ヲビ  $a \leq x \leq b = \tau$  ( $a \leq j \leq b$ ) 連続デ

$$|y_i(x) - \beta_i(x)| \leq \omega_i(x),$$

$$[\beta_i(x), \omega_i(x) \in \text{連続}, \beta_i(\alpha_i) = \beta_i]$$

ナリ任意ノ函数トスルトキ常 =

$$Z_j(x) = \beta_j + \int_{\alpha_j}^x \kappa(\alpha_j, t) \left\{ f(\cdot) - \sum_i \varphi_j^{(\infty)} y_i \right\}_t dt$$

ナリ  $Z(x) = \text{ツキテ}$

$$|Z_j(x) - \beta_j(x)| \leq \omega_j(x)$$

が成立すれば、(T)ヲ満足スル  $y_i(x)$  が存在スル。”

以上ハ抽象スギルケレドモ、 $f(\cdot)$ ノ大サヤ  $\alpha_i$ ノ分布  
等 = 適當ヲ制限 (不等式 = ヨシ) ヲツケレバ、容易 = 之レハ  
成立スル (之レヲ具体的 = 與ヘルコトハ略スルガ。)

只以上ノ不動点ノ定理カラハ解ノ存在 (ソノ範圍モ明確  
= 限定サレル) が結論サレルケレドモ、ソノ一意性ハ少シモ  
明カニハナラナイ。ソノタメニハ  $f(x, y, \dots, y(x))$   
ニツキ更ニ *Lipschitz* ノ條件 = 類スルモノヲ必要トスル  
(シカモソレハ不等式 = ヨツテ制限サレル!)