

618. 豊田浩七氏ノ論文ヲ讀ミテ

吉田 耕作 (阪大)

\mathcal{R} ノ距離付ケラレタ環トシ $X, U \in \mathcal{R}$ 且ツ変数 α ノ小サイトキ

$$\begin{cases} \exp(X + \alpha U) = (\exp X) \{ E + \alpha \varphi(U, X) + O(\alpha^2) \}, \\ \qquad \qquad \qquad E \text{ハ } \mathcal{R} \text{ノ単位} \\ \varphi(U, X) = \frac{U}{1} + \frac{[U, X]}{2} + \frac{[[U, X], X]}{6} + \dots \end{cases}$$

ガ成立スル (前談話 607)。コノ $[U, X] = UX - XU$ 。

今 \mathcal{U} ノ \mathcal{R} = 横ハル Lie-ring トシ其ノ base ヲ X_1, X_2, \dots, X_r トスル:

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^r C_{ij k} X_k, \quad U = \sum_{i=1}^r t_i X_i, \quad X = \sum_{i=1}^r \delta_i X_i$$

トオケバ上式カラ

$$\begin{cases} \varphi(U, X) = \|X_1, X_2, \dots, X_r\| \left\| \frac{e^{H(\delta)} - E}{H(\delta)} \right\| \left\| \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_r \end{matrix} \right\| \\ H(\delta) = \|h_{ki}(\delta)\|, \quad h_{ki}(\delta) = \sum_{j=1}^r \delta_j C_{ij k} \end{cases}$$

ヲ得ル。

倘テ今 $f_1(x), \dots, f_n(x)$ ヲ $x=0$ デ $0 = \text{ナル}$ 如キ $x=0$ / 近傍デノ実数值解析函数トスル。然ラバ

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ \sum_{i=1}^n f_i(x+\Delta x) X_i \right\} \\ &= \exp \left\{ \sum_{i=1}^n f_i(x) X_i + \Delta x \sum_{i=1}^n (f_i'(x) + O(\Delta x)) X_i \right\} \end{aligned}$$

= 上式ヲ應用スレバ

$$F(x) = \exp \left\{ \sum_{i=1}^n f_i(x) X_i \right\} \text{ へ}$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = F(x) \cdot \left\{ \|X_1, \dots, X_n\| \left\| \frac{e^{H(f(x))} - E}{H(f(x))} \right\| \left\| \begin{array}{c} f_1'(x) \\ \vdots \\ f_n'(x) \end{array} \right\| \right\}$$

ヲ満足スルコトガワカル。ヨツテ任意 $x=0$ / 近傍デノ實数值解析函数 $g_1(x), \dots, g_n(x)$ ヲ與ヘキトキ

$$\left\| \frac{e^{H(f(x))} - E}{H(f(x))} \right\| \left\| \begin{array}{c} f_1'(x) \\ \vdots \\ f_n'(x) \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} g_1(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{array} \right\|$$

ヲ解イテ $x=0$ デ $0 = \text{ナル}$ $x=0$ / 近傍デノ実数值解析函数 $f_1(x), \dots, f_n(x)$ ヲ求ムレバ (求メ得レコトハ上ノ方程式ノ形カラ明カ)

$$\frac{dG(x)}{dx} = G(x) \left\{ \sum_{i=1}^n g_i(x) X_i \right\}, \quad G(0) = E$$

ナル $G(x)$ ハ $\exp \left(\sum_{i=1}^n f_i(x) X_i \right) = \text{一致スル}$ 。

先日 埜田 浩七氏ノ論文 (東北大理科報告 25 卷 1 号, 2 号)ヲ讀ンテ結局ソノ *essence* ハ上ノ事実 ($G(x)$ ガ上ノ如ク exp ヲ表ハサレル)ニアルヤ否ニ思ハレマシタノデコトニ別証明ヲ試ミタ次第デス。