

617. 柳原氏 = 紙上デオ答へ.

其他二・三分割問題ヲ中心 = シテ

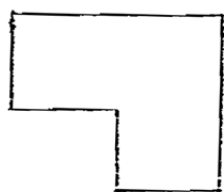
寺 阪 英 孝 (阪大)

1. 本紙第136号デ柳原氏ノ「一ツノ平面圖形ヲ、コレト合同ナ圖形デ包囲スル問題」ヲ拝読シマシタラ、ズット以前ノ本紙第17号デ當問題 = ツキオ話ノアツタコトヲ知ツタノデ、ソレヲ拝見シマシタ所、ソノトキ早速御返事申上ガネバナラヌ様ナ事柄デシタ。

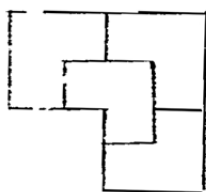
迷憎當時ハマダ、ユチラ = 居リマセンデシタノデ氣が付リズ英ノマユ = ナツテ居リマシタ次第デ、今トナツテハモウ

オ答ノ必要ガナイヨウデモアリマスガ、コレニ関聯シテ諸賢ニ御教示ヲ仰ギタ イトモアリマスノデ、紙面ヲ借リルコトニシマシタ。

2. 柳原氏ノオ尋ネハ「 $\square$ ニ合同ナルニツノ平面單一閉曲線 A, B ヲ以テ、コレト合同ナ四角形 C ヲ (隙向ナク) 完全ニ包圍スルコトガ出来ルカ」ト云フマウナコトガ或ルトキ東京大ノ學生ノ人ノ間デ問題トナツテ居タガ、コレハ誰ガ云ヒ出シタノカ、又ソノ來歴如何」ト云フ意味ノコトデシタガ、實ハ小生ガ斯クナ妙ナコトヲ云ヒ始メタノデシタ。1932年頃ダツタト思ヒマスガ、或ル時「 $\square$  (A) ナル圖形ヲ合同ナル四



(A)



(B)

個ノ四角形ニ分割セヨ」ト云フ、ヨクアル考ヘ物ノ本ハ (B) デアルガ、此ノ解ハ一意的デアルカ」ト

云フ數學者ラシイ疑問ガ話題ニ上ツタコトガアリマシタ。

此ノ種ノ問題ニ興味ヲ有ツテ居タノデ色々工夫ラシテキル中、フト

*K. Reinhardt: über die Zerlegung der euklidischen Ebene in kongruente Bereiche. Sitzungsber.*

*Akad. Wiss. Berlin (1928)*

ヲ見付ケタノデス。

本論文ハ Hilbert ノ有名ナ平面ノ合同分割問題ヲ解ケ手掛リトシテ、 $\square$ ニ分割ニ要スル合同四角形ハ、或ル假定ノ

下ニ、線分又ハ円弧カラナル多角形ダケ考ヘレバ宜シイ”ト云フ主定理ヲ稍々複雑デスが面白い方法ヲ取扱ツテキルノデ、コレハ良イト早速+ガラ前ノ問題ニ Reinhardtノ方法ヲ應用シヨツトシテ先ツ手初メニ考ヘモシ証明モ試ミタノガ柳原氏ノ表現ヲ借用シマスト “「A, Bガ重ナラナイデ或ル平面ノ一部 Dヲ包囲スルトキ」DガAト合同デアルコトハ不可能デアル, 「但シDノ中ニAト合同ナ図形ヲ容レルコトハ (隙間ガアツテモヨイナラ簡〆ニ) 出来ル”ト云フノデシタ。

當時數物ノ例會デモ話シタコトガアルノデすが、其ノ後証明ガ満足ニ行カスノデ打捨テテオキマシタ。ソレデスカラ Reinhardtノ問題ガ程経テ Jahresberichte紙上ニ出タトキハ、サモアリナント點頭イタト全誌ニ、一体同誌ハ通常解答付ノ問題ヲ採用スル答デスカラ、流石ハ合同分割専門ノ Reinhardtダケアツテ彼ノ難解ナ問題ガ而モ拡張サレタ形ヲ解ケルノダナト私カニ畏レ、敬ツタ訳デすがソレニシテモ誰ガ外ニ解ク人がアルダラウカト解答ノ出ルノヲ鶴首シテ待ツテキマシタトコロ、青天ノ霹靂、Vorderbergトイフ人ニヨツテ柳原氏ノ御紹介サレタマウニソノ誤ガ指摘サレタノデシタ。

然モソノ解答ノ明快サ、實ニ意外デス。出来上ツタ所ヲ見レバ、彼ガ先ヅ証明ヲ試ミヨツトシテ図形ノ曲線ニ目ジレシヲ附ケツ、次々ニ modify 遂ニ反対ノ結果ニ仕上ツタイキサツが見エレルマウデすが、其処迄ニ行ク辛抱強サニハタジ

圧倒サレル外アリマセン。

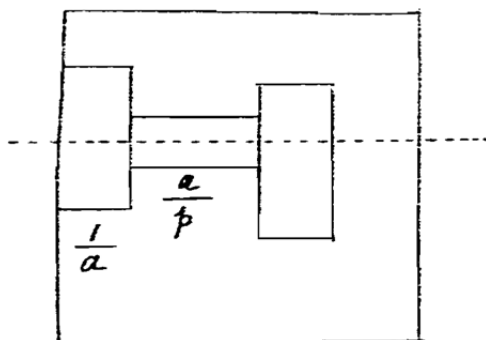
3. 柳原氏への回答トモツカスモノハコレデ終リマスが  
尚序 = 二三オ饒舌ヲイヌシマス。

所謂 *dissection* 分割ノ問題ハ通俗雜誌ノ考へ物 楠 = 屢々見カケマスガ、解ノ *unicity* ハ一般ニ融レラレズ又難カシイト思ヒマス。例ヘバ極ノ簡單ナ四形ヲツツテモ、次ノ様ナハ如何デセウ。

1°. 正三角形ハ  $n^2$ ,  $2n^2$  又ハ  $3n^2$  個ノ合同四形ニハ夫々分割出来ルガ、ソノ外ノ個数ニハ分割出来ナイ(?)

2°. 正方形ヲ奇数個ノ合同四形ニ分割スルニハ、矩形ニ分割スルヨリ外ナイ。ソノ中特ニ素数個ニ分割スル法ハ唯一ツヨリ外ナイ(?)

正方形ヲ素数個  $p$  ( $\neq 2$ )ノ“矩形”ニ分割スル法ガ唯一デアルコトハ初等的ニ判リマス。今正方形ノ辺長ヲ  $1$  トスレバ矩形ノ面積ハ  $\frac{1}{p}$ 。由ツテソノ一辺ヲ  $\frac{1}{a}$  トスレバ他ノ辺ハ  $\frac{a}{p}$  トナル。今正方形ガ矩形デウメラレテ居ルトシ、コレヲ正方形ノ辺ニ平行ナ一直線ヲ截ツタトキ、 $\frac{1}{a}$ ノ向きノガ  $m$  個、 $\frac{a}{p}$ ノ向きノガ  $n$  個アツタトスレバ次式ガ成立スル。



$$(1) \quad \frac{m}{a} + \frac{na}{p} = 1 \quad (1 \text{ハ正方形ノ辺長})$$

ユコニ

$$(2) \quad 0 \leq m \leq a < p, \quad 0 \leq n \leq p$$

ヨツテ

$$(3) \quad na^2 - pa + mp = 0$$

正方形ノ辺ニ平行ナ今一ツノ直線ヲ截ツタ時同様ニ  $m'$  個,  
 $n'$  個ヲラバ, 同ジク

$$n'a^2 - pa + m'p = 0$$

今  $n > n'$  ト假定シテユノ式ヲ (3) カラ引ケバ

$$(4) \quad (n - n')a^2 + (m - m')p = 0$$

(i)  $a$  が無理数ヲラバ (3) ニヨリ  $a^2 \in$  無理数。

此ノ時ハ (4) カラ  $n = n'$  トナリ (1) ハ  $m, n$  ニツキ一通リ  
シカ解ガナイコトナルカラ, 正方形ノ辺ニ平行ナ, ドノ直  
線上ニモ矩形ガ縦横ニ夫々同数ガケ並ンデキルコトナリ,  
コレガ事實不可能ナコトハ図形ノ上カラ容易ニ判ル。

(ii)  $a$  が有理数ヲ  $a = \frac{\lambda}{\mu}$  ( $\lambda, \mu$  整. 正. 既約)  
ヲラバ (4) ヨリ

$$(5) \quad (n - n')\lambda^2 + (m - m')p\mu^2 = 0$$

$n \leq p, n' \leq p$  ナル故  $(\lambda, p) = 1$  ノ時ニハ  $n = p,$   
 $n' = 0$  ナラバナラズ。コレヲ (1) ニ入レレバ  $a = 1$ 。  
由ツテ矩形ノ辺  $(\frac{1}{a}, \frac{a}{p})$  ハ  $(1, \frac{1}{p})$  ナラバ。又  
 $(\lambda, p) > 1$  ノ時ニハ, 即チ  $\lambda$  ガ  $p$  ノ因数ニ有ツトキニハ  
(5) ヲ  $p$  ガ割レバ

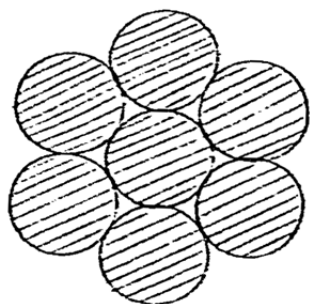
$$(n - n')\lambda'^2 p + (m - m')\mu^2 = 0 \quad (\lambda = \lambda'p)$$

ノ形トナリ  $(\mu, p) = 1$  ナル故、前ト同様ニ  $m = p, m' = 0$

が出、(1) = 入レルト  $a = p$  ダカラ、由ツテ辺が  $(\frac{1}{p}, 1)$  ナル矩形が得ラレル。イザレニシテモ矩形ニ分割スル法ハ一通リシカナイ。以上

尚一般ノ場合、図形トカ分割トカ言葉が曖昧デスガ、多角形トカ面分トカニ制限シテ議論スレバハツキリシマス。

左、尚元ノ問題ヲ考ヘテキタ頃、次ノマウナコトヲ考ヘ出シタコトガアリマス。ソレハ“合同図形ヲ6個用キレバ、



同形ノ圖形ヲ常ニ包圍スルコトが出来ル”

ト云フノデス。

(コレニ関シテハ森本清吾氏が昭和七年  
橋ノ物理學校雑誌ニ書イテ居ラレマス)

サテ此ノ6ナル數デスが近頃

Lichtesbaum: Sur un théorème de la  
topologie du plan. *Mathematisches  
Sbornik* T. 1 (43): 6. (1936)

ヲ見マシタラ次ノ定理が載ツテ居ルノデス。

“平面  $E$  ヲ開集合系  $F_1, F_2, \dots, F_i, \dots$  ナル被覆シタトキ、即チ  $E = \sum_{i=1}^{\infty} F_i$  ノトキ、平面上ノ任意ノ正方形ト素デナイ  $F_i$  ノ數ガ常ニ有限個ナラバ、 $E$  ノ被覆ヲ正則デアルト云フ。モシ此ノトキ各  $F_i$  ノ直径ガ更ニ有界ナラバ少クモ6個ノ  $F_i$  ト夫々素デナイマウナ  $F_i$  ガ少クモ一ツ存在スル。”

ト云フノテ実ハ斯ウイノ  $F_n$  ハ無限ニ存在スルノデスガ、  
例ヘバ平面ヲ正六角形ニ分割スルト、ドノ六角形ニツイラモ  
コレト共通点ヲ有ツモノハ6個ナス。上ニ云ツタ包囲問題モ  
*Lichtenbaum* ノ定理モ、図形ノ周囲ニ関スルコトデ、6  
ト云フ数ハ偶然ノ一致デハナイ様デス。

所デ *Lichtenbaum* ノ定理ハ *der zweite Pflaster-  
satz* トモ稱スベキモノデセウガ、証明ニ9頁ヲ費シテキ  
ル所ヲ見ルト少々長イヨウデスシ、而モ當然  $n$  次空間ニ拡  
張サルベキ性質ノモノデアルニ係ラズ、平面以外ニハ著者ハ  
触レテキマセンカラ、色々ノ意味ヲ手ヲ附ケル余地ノアル問  
題ガト思ヒマス。

5. 安部道雄氏が先年マツテ居ラレタ "矩形ヲ悉ク大イ  
サノ異ナル正方形ヲ隙間ナクウメル法" —— 矩形 デナクテ  
正方形 ガト赤分問題ハ解ケテ并ナイノデ、其処ニ興味ガア  
ル訳デスガ —— コレナドモ、*Schoenflies-Dehn* ノ  
*Analytische geometrie* ノ *Anhang* = 出テキル問  
題同様 *topological* ノ関係ガ入ル訳デスシ、又 *Lichten-  
baum* ノ定理ノヨウニ分割問題ニモ何物カヲ共ヘヨウトシ  
テキルノモアリマスガ、直接分割問題ノ位相幾何學化トモ解  
釈出来ルノハ

*R. L. Wilder: The strong symmetrical cut  
sets of closed euclidean  $n$ -space Fund.  
Math. 27(1936)*

デ、良イ *model* ガト思ヒマス。

色々混雑シマシタガ、以上ノコトデ何か御氣付ノコトガ  
アリマシタラ紙上デ御啓示願ヒタイト存シマス。