616. Hilbert 空間ニ於ケル Linear translatable functional equation. (III)

北川　敏男（阪大）

〔概要〕（II）即チII部ニ於テハ，（I）即チ緒言ニ述ベタ問題ニ對スル特殊化ヲ施シ，遂ニ特殊化3ニ於テハ，求メル解ニ對シテ、定理デ主張スルヤウナ展開ノ對應スルコトヲ示シタ。殘ルトコロハ，解ノ Almost Periodicity ノ証明ノミデアルガ，コノタメニ、Cauchy 級數ノ理論ヲ利用スル。コレヲ（III）即チIII部ニ於テ述ベヨウト思フ。

吾々ノ當面ノ目的ニハ，L^2_M 空間デノ値ヲトル函數ヲ Cauchy 級數ヲ調ベレバ充分デアルケレドモ，シカシ、他ニ應用ノ機會ガアルカモ知レナイカラ、Banach 空間ノ値ヲトル函數ノ Cauchy 級數ヲ述ベヨウ。積分トシテ Bochner ノ積分ヲ用キルコトニヨリ、numerically valued ナ函數ノ Cauchy 級數論ガソノマヽ拡張サレルコトヲ述ベタイ。Bochner ガ示シタ Banach 空間値函數ノ Fourier 級數ハ以下ノ議論ノ特殊ノ場合デアル。値域ガ Banach 空間デアルヤウナ函數ニツイテハ，Birkhoff ノ積分モ知レテキル．シカシ，コレヲ用キテハ，以下ノ議論ハ進行シ難イ。

II. Banach 空間値函數ノ Cauchy 級數

17. 函數 $f(t)$ ハ全實軸 $-\infty < t < \infty$ デ定義サレテ

Banach空間(B)ノ値ヲトルモノトスル。カヽル函數ノウチデ、任意ノ有限區間ニ於テ Bochner ノ意味デ可積分デアルヤウナモノノ全体ヲ(F)デ表ス。(Bochner ノ積分ニ關シテハ Fund. Math 20. 參照). Additive Operation Λ ハ (F) ノ任意ノ元ニ對シテ定義セラレ、ソノ contradomain ハ (F) ニ屬スルトシ, 更ニ次ノ條件ヲ充スモノトスル。

I. Λ ハ translation ト可換デアル; 即チ $T_a f(x) \equiv f(x+a)$ トオクトキ任意ノ實數 a ニ對シテ $T_a \Lambda f(x) = \Lambda T_a f(x)$.

II. Λ ハ定積分ト可換デアル; 即チ E ヲ實軸上ノ任意ノ有界可測集合トシ. 積分ヲ Bochner ノ意味ニトルトキ,

$$\int_E \Lambda f(x+t)\,dt = \Lambda \int_E f(x+t)\,dt$$

III. Λ ニ對シテ常數 a, b ガ定マリ、$\Lambda f(x)$ ハ $x+a \leqq t \leqq x+b$ ニ於ケル $f(t)$ ノ値ニノミ依存シテ定マル。コヽニ $a<0<b$ デ, a, b ハ t ニモ f ニモ關係シナイ。

IV. Λ ハ連續函數ノ一樣收斂系列ニ對シテ連續デアル; 即チ $f_n(t)$ $(n=1, 2, 3, \ldots\ldots)$ 並ビニ $f(t)$ ガ (F) ニ屬シ, $f_n(t)$ ガ $[x+a, x+b]$ デ連續デ、$g_n(t) = \| f(t) - f_n(t) \|$, $\max\limits_{x+a \leqq t \leqq x+b} g_n(t) = \rho_n(x)$ トオクトキ、$n \to \infty$ ノトキ $\rho_n(x) \to 0$ ナラバ

$$\lim_{n\to\infty} \Lambda f_n(x) = \Lambda f(x)$$

コノ様ナ Λ ヲバ，(F) ニ於ケル *Linear translatable operation* トイフ。タトヘバ，$\varphi(t)$ ヲバ $[a, b]$ デ有界変分ノ complex-valued ナ函数トスルトキ

$$\int_a^b f(x+t)\,d\varphi(t)$$

ノ如キハ，上ノ條件ヲ悉ク満足スル。

Banach 空間ノ任意ノ元 a ト，任意ノ複素数 λ トニ對シテ、$e^{\lambda t}\mathfrak{a}$ ハ (F) ニ属シ、又明カニ $\Lambda e^{\lambda t}a = G(\lambda)e^{\lambda t}a$ ナル如キ函数 $G(\lambda)$ ガ定マル。コレハ t ヤ $\mathfrak{a}$ ニハ無関係デアル。コレヲ母函数ト呼ブ。母函数ニ関シテ

V. <u>$G(\lambda)$ ハ整函数デアル</u>.

トイフ假定ヲナス。

8. 以下 $\Lambda f(t)$ ノ代リニ $\underset{t}{\Lambda}{}_\xi f(\xi)$ ナル記法ヲ用キルコトガアル。点 t ニ於ケル，$f(x)$ ノ Λ ニ関スル *Cauchy* 級数 $\mathfrak{C}$-*section* トイフノハ，次ノ如キ contour 積分ニ依ッテ定義スル。

$$S_{\mathfrak{C}}(t, t_0; f) \equiv \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathfrak{C}} \frac{e^{\lambda t}}{G(\lambda)} \underset{0}{\Lambda}{}_\xi \left[e^{\lambda\xi}\int_{t_0}^{t_0+\xi} f(\eta)e^{-\lambda\eta}d\eta\right] d\lambda \quad (18)$$

---

(18) カウシタ contour-integral ヲ考ヘウルタメニハ，多少ノ考察ヲ必要トスル。シカシ、コレニツイテハ，N. Wiener: *Note on a paper of N. Banach. Fund. Math. Tom* IV (1923) ヲ参照セラレタイ。

茲ニ，積分ハ悉ク Bochner ノ意味ニ於テデアル。Bochner ノ積分ニ関シテハ，次ノ (i)，(ii) ガ知ラレテキル。

(i) $f(x)$ ガ (α, β) デ Bochner 可積分ナラバ，$\alpha < \gamma < \beta$ ニ對シテ

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$$

(ii) 部分積分法ノ成立

コノ二ツノ事柄ガ、吾々ガ向キニ、Ordinary Cauchy series デ與ヘタ $S_{\mathfrak{C}}(x, t; f)$ ノ変形ヲソノマヽ成立セシメル。何故ナラバ，コノ (i)，(ii) ニ相當シタコトシカ用キナカッタカラデアル。即チ

(α) 変形定理ノ成立．（〔T〕Chapter I，§1 参照）ヲ確メルコトが出来ル。更ニ、Ordinary Cauchy series ト同様ニシテ、

(β) 評價定理ノ成立（〔T〕Chapter I，§2 参照）ヲモ確メウル。即チ：

$\boxed{\text{評價定理}}$ $f(x) \in (\bar{H})$ ナラバ $R(\lambda) \geqq 0$ トシテ

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} e^{\lambda t_0} \underset{0}{\Lambda}_{\xi} \left\{ e^{\lambda \xi} \int_{t_0+\xi}^{t_0+b_1} e^{-\lambda \eta} f(\eta)\, d\eta \right\} = o(1)$$

証明：$\delta < b_1 - b$ ナル様ニ正数 δ ヲ選ブトキ Λ ノ Additioität カラ

$$\underset{0}{\Lambda}_{\xi} \left\{ e^{\lambda \xi} \int_{t+\xi}^{t+b} e^{-\lambda \eta} f(\eta)\, d\eta \right\}$$

$$=\underset{0}{\Delta}_{\xi}\left\{e^{\lambda\xi}\int_{t+\xi}^{t+\xi+\delta_1} e^{-\lambda\eta} f(\eta)\,d\eta\right\}+\underset{0}{\Delta}_{\xi}\left\{e^{\lambda\xi}\int_{t+\xi+\delta_1}^{t+b} e^{-\lambda\eta} f(\eta)\,d\eta\right\}$$

更ニ，條件IIニヨツテ，

$$\underset{0}{\Delta}_{\xi}\left\{e^{\lambda\xi}\int_{t+\xi}^{t+\xi+\delta_1} e^{-\lambda\eta} f(\eta)\,d\eta\right\}=\int_{t}^{t+\delta}\underset{0}{\Delta}_{\xi}\left\{f(\xi+\eta)\right\}e^{-\lambda\xi}\,d\zeta$$

Bochner 積分ニ於テハ，積分ハ totalstetig ニナルカラ正數 ε ヲ如何ニ與ヘテモ $\delta\leqq\delta(\varepsilon)$ ナル限リ $R(\lambda)\geqq 0$ ニテ、λ ニ關シテ一様ニ

$$\left\|\int_{t}^{t+\delta}\underset{0}{\Delta}_{\xi}\left\{f(\xi+\eta)\right\}e^{-\lambda\xi}\,d\zeta\right\|<\varepsilon \qquad (*)$$

ナラシメウル。

次ニ，

$$\left\|e^{\lambda\xi}\int_{x_0+\xi+\delta}^{x_0+b} e^{-\lambda\eta} f(\eta)\,d\eta\right\|=\left\|\int_{\delta}^{b_1-\xi} f(x_0+\xi+\zeta)\,e^{-\lambda\zeta}\,d\zeta\right\|$$

$$\leqq\int_{\delta}^{b_1}\left\|f(x_0+\xi+\zeta)\right\|\left|e^{-\lambda\zeta}\right|d\zeta$$

$$\leqq\left|e^{-\lambda\delta}\right|\int_{\delta}^{b_1}\left\|f(\xi+x_0+\zeta)\right\|d\zeta \qquad (**)$$

コレハ，$|\lambda|>\lambda_0(\delta)$ ナラシメルトキ，又 ε ヨリモ小ナラシメウル。

依ツテ評價定理ハ (*) ト (**) トカラ得ラレル。

（注意） $R(\lambda)\leqq 0$ ノトキニハ同様ニシテ

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} e^{\lambda t_0}\underset{0}{\Delta}_{\xi}\left[e^{\lambda\xi}\int_{t_0+\xi}^{t_0+a_1} e^{-\lambda\eta} f(\eta)\,d\eta\right]=0 \ (1)$$

コレラノ二ツノ事實ハ，〔T〕Chapter I, §3 ノ議論ヲ，平行ニ移スコトヲ許ス。（但シ，Banach 空間値函数ノ有界変分函数トイフノハ，ココデハ觸レナイコトニスル。以下ノ目的ニハ考ヘル必要ハナイ）

吾々ハ以下ノ目的ノタメニ、次ノ補助定理ヲ掲ゲルニトメル。

<u>補助定理 8.1.</u> “$f(x)$ ハ (F) ニ属シ，且ツ任意ノ有限區間デ一様ニ連続トスル。今、contours ノ系列 $\{\mathfrak{C}_r\}$ ガアッテ

$$\{\mathfrak{C}_r\} \in O(\delta, -\delta)^{(19)}$$

且ツコノ列ニ對シテ

$$G(\lambda) = \mathfrak{C}_r - \Omega(0;\ a+\delta,\ b-\delta)^{(20)}$$

ニナッテヰルトスル。$\mathfrak{C}_r$ ハ各々，虚軸ト，$\pm i\rho_r$ ダケシカ交ハラナイモノトシ，$\{\rho_r\}$ ノ分布ニ関シテハ，$a^{+\delta} \leqq t \leqq b^{-\delta}$ ニテ

$$\frac{1}{n}\left\{\sum_{r=0}^{n-1} \sin\rho_r t - \sum_{r=0}^{n-1} \sin\frac{2r\pi t}{b-a-2\delta}\right\} = o(1)^{(21)}$$

$(n \to \infty)$ ヲミタス様ニナッテヰルトスル．シカルトキニハ $t_0 + a + \delta \leqq t \leqq t_0 + b - \delta$ ニテ一様ニ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} S_{\mathfrak{C}_r}(t, t_0; f) = f(t)$$

ヲ得ル。”

---

(19) 〔T〕Chapter I, §3 Definition III

(20) 〔T〕Chapter I, §3 〃 IV

(21) 〔T〕Chapter II, §12 Condition 3°, (1206) 参照）

<u>補助定理8.2.</u> "前ノ補助定理ノ假定ニ對シテ更ニ

$$\Lambda f(t)=0 \qquad (-\infty<t<\infty)$$

ト假定スルトキニハ，結論ニ於テ、〝$t_0+a+\delta \leqq t \leqq t_0+b-\delta$ ニテ一樣ニ〟ヲバ〝實軸上ノ任意ノ有限區間デ一樣ニ〟ニオキカヘウル。[22]"

コレラノ補助定理ハ Ordinary Cauchy's series ノ場合ト同樣ナ方法デ證明サレル。

---

(22) [T] Chapter IV, II 參照（コレニ correspond スルトイフ譯デハナイガ證明ハ同樣ニ行クカラ）