614. Einfache Algebra ノ Bewertung ニツイテ

河田　敬義（東大學生）

M. Deuring: "Algebren." VI §10 ニ於テ，基礎体ノ Hauptordnung デ，スベテノ Ideal ガ Primideal potenzprodukt トシテ一意的ニアラハサレル場合ニ，ソノ Maximalordnung ノ zweiseitiges Primideal ニヨル Bewertung ニツイテ述ベテアリマスガ，今逆ニ適當ナ Axiome ヲオクコトニヨッテ、丁度コノ種ノ Bewertung ガ得ラレル様ニシタイト思ヒマス。

(I) Def.『normaleinfache Algebra A/P ノ (diskrete) Bewertung トハ

1) A/P ノ元 a ($a \neq 0$) ニ 0 叉ハ正負ノ整数 $w(a)$ ヲ一意的ニ對應サセル。(特ニ 0 ニハ ∞ ヲ)

2) $w(a+b) \geqq \mathrm{Min}(w(a), w(b))$.

3) $w(a \cdot b) \geqq w(a) + w(b)$

4) 基礎体 P ノ元 a, b ニツイテハ 3) デ常ニ等号ガ成立スル。』

コレハ上ニ述ベタ Deuring ノ Bewertung ニツイテハ成立スル條件デス。

叉 A/P ノ二ツノ Bewertung w_1, w_2 ガ äquivalent トイフコトハ，両者ニツイテノ Nullfolge ガ一致スルト定義シマスト、ヨク知ラレテヰル。

Satz『w_1 ト w_2 トガ äquivalent ナル必要充分條件ハ
両者ニヨル perfekte Erweiterungsring ガ一致
スルコトデアル。』
ガ成立シマス。

(II) 今コノヤウナ Bewertung w ガ與ヘラレルト，
P ノ元ニツイテハ定義ヨリ Körperbewertung $w_\mathfrak{p}$ ヲヒキ
オコシマス。ソレニヨル perfekte Erweiterung ヲ $P_\mathfrak{p}$
トシマス。

今 $A = u_1 P + \cdots\cdots + u_n P$ トシマスト $A \times P_\mathfrak{p} = u_1 P_\mathfrak{p} + \cdots\cdots + u_n P_\mathfrak{p}$ ニマデ Bewertung w ヲ拡張スルコトが出來
マス。ソレハ $A \times P_\mathfrak{p}$ ノ元

$$\alpha_\mathfrak{p} = u_1 \alpha_1^\mathfrak{p} + \cdots\cdots + u_n \alpha_n^\mathfrak{p} \quad (\alpha_i^\mathfrak{p} \in P_\mathfrak{p})$$

ニ對シテ任意ニ

$$\alpha_i^\mathfrak{p} = \lim_{r} \alpha_i^r \quad (\alpha_i^r \in P)$$

ヲトッテ，

$$a^r = u_1 \alpha_1^r + \cdots\cdots + u_n \alpha_n^r$$

トシマスト $\{a^r\}$ ハ Fundamentalfolge トナリマス
カラ $\lim_{r\to\infty} w(a^r)$ ヲ以テ $w(a_\mathfrak{p})$ ト定義シマス。コレガ
$\{\alpha_i^r\}$ ノ選ビ方ニ無関係ナコトハ直チニワカリマス。

Satz『A/P ノ Bewertung w ハ上ノ方法ニヨリ $A_{P_\mathfrak{p}}/P_\mathfrak{p}$
マデ擴張出來ル。ソシテ $A_{P_\mathfrak{p}}/P_\mathfrak{p}$ ハ w ニツイテ perfekt
デアル。』

☺ 前半ハ上ニキメタ $w(a^r)$ ガ Def. ノ條件ヲミタスコト
ヲ一ツ一ツシラベレバ明デス。

後半ハ Körperbewertung デ用ヒラレル次ノ Lemma ニヨレバ明デス。ソノ証明ハイツモノ通リデス。

Lemma.『$\theta_r = u_1\alpha_1^r + \cdots\cdots + u_n\alpha_n^r$ ($\alpha_i^r \in P_\mathfrak{p}$) トスルトキ $\{\theta_r\}$ ガ Fundamentalfolge トナルノハスベテノ $\{\alpha_i^r\}$ ガ Fundamentalfolge トナルトキニ限ル。特ニ $\{\theta_r\}$ ガ Nullfolge トナルノハ $\{\alpha_i^r\}$ ガ Nullfolge トナル時ニカギル。』

(III) $A\times P_\mathfrak{p}$ ハ $P_\mathfrak{p}$ ノ上ニ normaleinfach トナリ、又 $P_\mathfrak{p}$ 中 $w(a)\geqq 0$ ノ全体 $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ トシマス。

Satz.『$A_{P_\mathfrak{p}}/P_\mathfrak{p}$ ノ Bewertung w デ $w(a)\geqq 0$ ノ全体 $\mathfrak{O}_w$ ハ $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ ノ上ノ Ordnung トナル。又 $w(a)\geqq S$ ノ全体 $\mathfrak{A}_S$ ハ $\mathfrak{O}_w$ ノ zweiseitiges Ideal トナル。』

☺ 中山：「局所類体論」ニアル Ordnung ノ定義ノ條件1, 2, 3ヲシラベマス。

1. $\mathfrak{O}_w$ ガ Ring ヲナスコトハ Def. ヨリ明デス。又確ニ $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ ヲ含ミマス。
2. $\mathfrak{o}_\mathfrak{p}$ 中ニ $w(\alpha)$ ノ幾ラデモ大ナル α ガアリマスカラ, g ヲ $A\times P_\mathfrak{p}$ ノ任意ノ元トシマスト $w(\alpha g)\geqq 0$ ニナル様ニ α ガトレマス。
3. $\mathfrak{O}_w$ ノ元ヲ $u_1\alpha_1 + \cdots\cdots + u_n\alpha_n$ トシタ時ニ $w_\mathfrak{p}(\alpha_i)$ ガ下ニ限ラレテキルコトヲ言ヘバヨイコトニナリマス。今ソウデナク $\theta^r = u_1\alpha_1^r + \cdots\cdots + u_n\alpha_n^r$, デ $\lim_{r\to\infty} w_\mathfrak{p}(\alpha_1^r) = -\infty$ トシマスト $\mathfrak{o}$ ノ中カラ $w_\mathfrak{p}$ ガ正ノ最小トナル元ヲトッテ

$$\bar{\theta}^r = \theta^r \pi^{-\frac{w_{\mathfrak{p}}(\alpha_1^r)}{w_{\mathfrak{p}}(\pi)}}$$

トシマスト $w(\theta^r) \geqq 0$ ヨリ $\bar{\theta}^r \to 0$ トナリマス。

∴ Lemma ヨリ $\bar{\theta}^r = u_1\bar{\alpha}_1^r + \cdots\cdots + u_n\bar{\alpha}_n^r$ トシマスト $\bar{\alpha}_i^r \to \bar{\alpha}_i$ トナリマス。トコロガ $w(\bar{\alpha}_1) = w(\bar{\alpha}_1^r) = 0$ デスカラ $\bar{\alpha}_1 \neq 0$ トナリマス。コレカラ $u_1 \cdots\cdots u_n$ ガ $P_{\mathfrak{p}}$ ノ上ニ一次独立トイフコトニ反スルコトニナリマス。

∴ $\mathfrak{O}_w$ ハ Ordnung トナリマス。

$\mathfrak{a}_S$ ガ Ideal トナルコトモ一ツ一ツ條件ヲタメシテミレバ分リマス。———

(IV) $\mathfrak{O}_w$ ガ Maximalordnung トナルオドウカハワカリマセンガ、次ノ Satz ガ成立チマス。

今 $\mathfrak{O}$ ヲ $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ ノ上ノ一ツノ Maximalordnung トシテソノ只一ツノ Primideal $\mathfrak{P}$ ニヨツテ Deuring ノ方法デ Bewertung $w_{\mathfrak{P}}$ ガ出來マス。ソノ時ニ勿論 $P_{\mathfrak{p}}$ ニハ $w_{\mathfrak{p}}$ ヲヒキオコシマス。

Satz IV w ト $w_{\mathfrak{P}}$ トハ äquivalent デアル。即チ $P = w_{\mathfrak{p}}$ ナル Bewertung ヲヒキオコス A/P ノ Bewertung ハ äquivalent ナルモノヲマトメレバ只一通リシカナイ。」

∵ 上ノ Lemma カラ $P_{\mathfrak{p}}$ ガ $w_{\mathfrak{p}}$ ニツイテ perfekt デスカラ両者ニヨル Nullfolge ハ一致シマス。∴ äq. トナリマス。———

コレデ結局 A/P ノ Bewertung ハ P ノ Bewertung ト

一對一ニ對應スルコトニナリマシタ。

又特ニPノ Hauptordnung $\mathfrak{o}$ デスベテノ Ideal ガ Primidealpotenzprodukt トシテ一意的ニアラハサレルトキニハ，Pニ $\mathfrak{o}$ ノ Primideal $\mathfrak{p}$ ニヨル Bewertung $w_{\mathfrak{p}}$ ヲヒキオコスモノハ，丁度 Deuring ノ Bewertung 丈シカナイトイフコトガ分リマス。コレデ大体目的ガ達セラレタト思ヒマス。

(注意) Def. ノ 4) ヲヌクスト、又イロイロ複雑ニナルト思ヒマスガ、特ニPガ有限次代数的数体ノ時ニハ K. Mahler ノ Pseudbewertung ノ理論ヲ使ヘバ丁度 Deuring ノ $|\ |_{\alpha}$ ニ相當スルモノ丈ガ得ラレルコトヽ思ヒマス。

—— 以上 ——