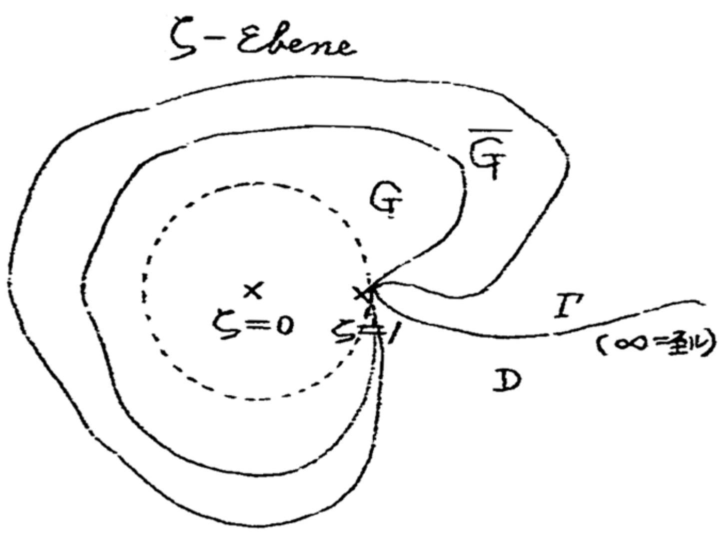
613. Verzerrungssatz ト Minimumprinzip

早田　文一

ζ平面ニ單位円ヲ含ミ無限点 $\zeta=\infty$ ヲ内点トシテ含マヌ單一連結ナ領域Gヲ考ヘル。更ニGハ $\zeta=1$ ヲRandpunktニ持ツト假定スル。今 $\zeta=1$ ト $\zeta=\infty$ トヲG内ニ入ラヌ單一ナ Jordankurve Γ デ結ビ Γ ニ沿フテ Schlitz ヲ入レル。全有限平面ニ Schlitz Γ ヲ入レタ領域ヲDトスル。



Gヲζ平面ノ單位円ニ一對一ニ寫像シ原点同志ヲ對應セシメル函数ヲ $f(\zeta)$ トスルトキ $|f'(0)|$ ガGノ拡張ニ従ヒ如何ニ変化スルカヲ見ヨウトスル。ソノタメGト同ジヤウナ性質ヲ有スル他ノ領域、即チ單位円 $|\zeta|<1$ ヲ含ミ $\zeta=\infty$ ヲ内点トシテ含マナイ領域 $\bar{G}$ ヲ作リ、猶 $\bar{G}$ ハGヲ含ムヤウニスル。（Gト$\bar{G}$トハ Randpunkte ヲ共有シテモ差支ナイガ Gノ内点ナラザル $\bar{G}$ ノ内点ガ存在スルモノトスル）

$\bar{G}$ ノ寫像函数ヲ $\bar{f}(\zeta)$ トスル。$\zeta=0$ ノG及ビ$\bar{G}$ニ関スル Green 函数ハ夫々 $-\log|f(\zeta)|,\ -\log|\bar{f}(\zeta)|$ デアル。コレラノ差 $\log|f(\zeta)|-\log|\bar{f}(\zeta)|$ ヲGニ於テ考ヘ

ルト、コレハ先ヅ G ノ内部ニ於テ至ルトコロ正則デアッテ G ノ Randpunkt ニ於テ $\log|f(\zeta)|=0$, $\log|\bar{f}(\zeta)|\leqq 0$ デアル。ヨッテ調和函数ノ minimum ― prinzip ニヨリ G デ至ルトコロ

$$\log|f(\zeta)|-\log|\bar{f}(\zeta)|\geqq 0$$

即チ

$$|f(\zeta)|\geqq|\bar{f}(\zeta)|$$

$G, \bar{G}$ ノ代リニ単位円 $|z|<1$, G ヲ置イテモ或ハ $\bar{G}$, D ヲ置イテモソレゾレノ場合ノ函数ニツキ同様ナ不等式ヲ得ル。ヨッテ単位円ノ写像函数ヲ $|z|=|\zeta|$. $z=g(\zeta)$ トスレバ

$$|\zeta|\geqq|f(\zeta)|\geqq|\bar{f}(\zeta)|\geqq|g(\zeta)| \qquad |\zeta|<1$$

コノ不等式ヲ $|\zeta|$ デ割ッテ $\zeta\to 0$ ナラシムレバ

$$1\geqq|f'(0)|\geqq|\bar{f}'(0)|\geqq|g'(0)|$$

コヽニ等号ノ成立スルノハ二ツノ領域ガ一致スル場合ニ限ル。何トナレバ例ヘバ中間ノ二ツ $f(\zeta)$, $\bar{f}(\zeta)$ ヲ考ヘレバ

$$f(\zeta)=c_1\zeta+c_2\zeta^2+\cdots\cdots$$
$$\bar{f}(\zeta)=\bar{c}_1\zeta+\bar{c}_2\zeta^2+\cdots\cdots$$

トスレバ

$$\log|f(\zeta)|=\log|c_1|+\log|\zeta|+u(\zeta)$$
$$\log|\bar{f}(\zeta)|=\log|\bar{c}_1|+\log|\zeta|+\bar{u}(\zeta)$$

$u(\zeta)$, $\bar{u}(\zeta)$ ハ夫々 G, $\bar{G}$ ニ於テ正則ナ調和函数デ $\zeta=0$ デ 0 ニナル。

ヨッテ $|f'(0)|=|\bar{f}'(0)|$ トスレバ

$$\log|f(\zeta)|-\log|\bar{f}(\zeta)|=u(\zeta)-\bar{u}(\zeta)$$

デアルガ、コレハ上ニ述ベタヤウニ Minimum ＝prinzip ニヨリG内デ負トナラナイノデアルカラ $\zeta=0$ デ0トナレバ gebiet 内デ常ニ0デナケレバナラナイ。$|f(\zeta)|=|\bar{f}(\zeta)|$ ヨリGト$\bar{G}$トハ一致シナケレバナラナクナル。ヨツテ次ノ結果ニ達スル。

結果[1]: ζ平面ノ$\zeta=1$ト$\zeta=\infty$トヲ単位円内ニ入ラヌ単一ナ Jordanbogen デ結ビ、コレニ沿フテ Schlitz ヲ入レル。出来タ gebiet ヲDトスル。別ニ$\zeta=1$ヲ通過シ、単位円ヲ含ミ$\zeta=\infty$ヲ含マナイ領域ヲG,$\bar{G}$トスル。D, G, $\bar{G}$ヲ夫々他ノ平面上ノ単位円ニ寫像シ且ツ原点同志ヲモ對應セシムル函数ヲ夫々 $g(\zeta)$, $f(\zeta)$, $\bar{f}(\zeta)$ トスル。Gガ$\bar{G}$ニ含マレルトキ次ノ不等式ガ成立スル。

$$|\zeta|\geqq|f(\zeta)|\geqq|\bar{f}(\zeta)|\geqq|g(\zeta)|$$

$$(1)\cdots\cdots 1\geqq|f'(0)|\geqq|\bar{f}'(0)|\geqq|g'(0)|$$

コヽニ等号ノ成立スルノハ二ツノ gebiet ガ一致スル場合ニ限ル。($|\zeta|$, 1ハζ平面上ノ単位円ニ相當スル) Γガ特ニ$\zeta=1$カラ實軸ノ正ノ部分ニ沿ツテ∞ニ至ル Schlitz デアルトキニハ

$$z=g_0(\zeta)=\frac{1-\sqrt{1-\zeta}}{1+\sqrt{1-\zeta}} \qquad (\text{Koebe ノ Extremalfunktion})$$

或ハ $$\zeta=\frac{4z}{(1+z)^2}$$

$$g'(0)=\frac{1}{\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{z=0}}=\frac{1}{4}$$

従ッテ単位円 $|\zeta|<1$ ヲ廣ゲテ行ク場合ニ實軸ノ 1 ヨリ大キナ部分ガ常ニ gebiet ノ内部ニ入ラヌ様ニスレバ上ノ結果ヨリ

$$1 \geqq |f'(0)| \geqq \frac{1}{4}$$

Extremalgebiet D ノ Schlitz Γ ガ如何ニナルカハ gebiet ノ拡張ノ仕方ニヨルコトデアッテ一般ニハ $\zeta=1$ ト $\zeta=\infty$ トヲ結ブ曲線ニ沿ッタ Schlitz ニナル。今 Schlitz ガ直線デアル場合ノ Extremalgebiet ヲ D_0，函数ヲ $g_0(\zeta)$ トスルト上ノ結果カラ $|g'(0)|$ ト $|g_0'(0)|$ トハ何レガ大デアルカハ断定スルヲ得ナイ。シカシ Koebe ノ定理ニヨレバ，確カニ

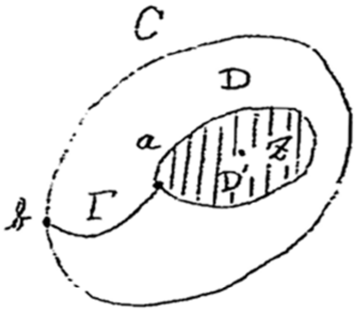
$$(2) \cdots\cdots |g'(0)| \geqq |g_0'(0)| = \frac{1}{4}$$

トナラナケレバナラヌ。D ト D_0 トヲ比較スルト、何レモ全有限平面ヲオヽフ領域デ〝外点〟ヲ持タズ、唯 Rand ダケガ異ナルモノデアル。各々 erweitern シ盡シタ領域デアルカラ $|g'(0)|$, $|g_0'(0)|$ ノ大小ヲ比較スルノニ上ニ使用シタ Erweiterungsprinzip（即チ Minimumprinzip）デハ不可能デアル。Koebe ノ定理ヲ証明スルニ當リ Schmidt 又ハ Ahlfors ノ方法ガ Erweiterungsprinzip 以上ニ有効ナノハ (2) ノ不等式ヲ証明シ得ル点ニアルト思ハレル。

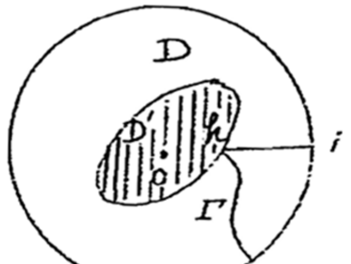
Rand ダケガ異ナルニツノ領域 D, D_0 ヲ単位円ニ寫像スルトキ、原点ニ於ケル Abbildungsmodul ノ間ニ (2) ノ関係ガ成立スルトイフコトカラ次ノヤウナ事実ガ推測セラ

レル。

任意ノ単一連結ナ曲線 C ニヨリカコマレタ領域 D ノ内部ニ一点 a ヲ取リ、又 C 上ニ一点 b ヲトル。更ニ D 内ニ a 以外ニ一点 $\zeta = \zeta$ ヲトリ ζ ヲ内点トシ a ヲ Randpunkt ニ持ツ様ナ D ノ Teilgebiet D' ヲツクル。



a ト b トヲ D 内ニアル D' ノ内部ニ入ラナイ単一曲線 Γ デ結ビ、D ニ對シテ Γ ニ沿ヒ Schlitz ヲ入レタ領域ヲ G トスル。G ヲ他ノ平面ノ単位円ニ寫像スル函数ノウチ ζ ニ於ケル abbildungsmodul ノ最小ナ函数ハ何カ？



然シナガラコレデハ問題ガアマリ廣スギルノデ次ニ述ベルヤウニ問題ヲセマリシヲ見ル。領域ハ ζ 平面上ノ単位円トシ $\zeta = h$ (h 実数、$0 < h < 1$) ナル一点ヲ固定スル。又 $\zeta = 0$ ヲ内部ニフクミ $\zeta = h$ ヲ通過スル単一ナ Jordan 曲線デカコマレタ領域ヲ D' トスル。

h ト円周上ノ任意ノ点 b トヲ D' ノ内部ニ入ラナイ単一 Jordan 曲線ニヨツテ結ビ、D ニコノ曲線 Γ ニ沿フテ Schlitz ヲ入レタモノヲ G トスル。G ヲ別ノ平面ノ単位円ニ寫像スル函数ヲ $f(\zeta)$, D ニ実軸ノ $h < \zeta < 1$ ノ部分ニ Schlitz ヲ入レタ領域ヲ G_0 トシテ G_0 ニ関スル寫像函数ヲ $g(\zeta)$ トスル。(原点同志常ニ對應スル。) シカルトキ、次ノ不等式ガ成立シテ

(3) ...... $\underline{|f'(0)| \geqq |g'(0)|}$

等号ハ Γ が実軸ト一致スルトキニ限ル。（"Γ が単位円ニ對シテ直交スル円弧ナル場合ニ限ル" ト訂正）

(3) ノ事實が成立スルコトハ未ダ証明出來ナイノデアルが確カデアルマウニ思ハレル。$g(\zeta)$ ハ既ニ知ラレテヰル様ニ esqligit ニ計算出來ル。

$$(4.1)\quad t^2 = \frac{h-\zeta}{1-h\zeta}$$

$$(4.2)\quad z = -\frac{t-\sqrt{h}}{1-\sqrt{h}\,t} \cdot \frac{1+\sqrt{h}\,t}{t+\sqrt{h}\,t}$$

求ムル寫像函数 $z = g(\zeta)$ ハ (4) ノ二ツノ変換ヲ組合セレバヨイ。原点ニ於ケル abbildungsmodul ヲ求メルト

$$\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{z=0} = \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_{t=\sqrt{h}} \cdot \left(\frac{dt}{dz}\right)_{z=0}$$

$$\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_{t=\sqrt{h}} = \frac{-2\sqrt{h}}{1-h^2},\quad \left(\frac{dt}{dz}\right)_{z=0} = \frac{1}{\left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=\sqrt{h}}} = \frac{-2\sqrt{h}(1-h)}{1+h}$$

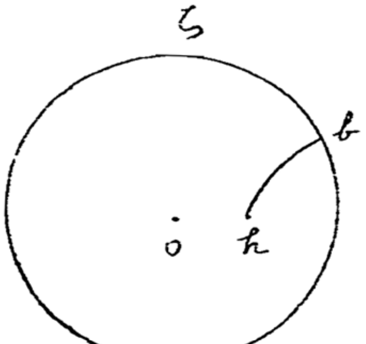
デアルカラ

$$(4.3)\quad \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{z=0} = \frac{-2\sqrt{h}}{1-h^2} \cdot \frac{-2\sqrt{h}(1-h)}{1+h} = \frac{4h}{(1+h)^2} \quad \left(h < \frac{4h}{(1+h)^2} < 1\right)$$

故ニ (3) ハ $|f'(0)| \geqq \frac{(1+h)^2}{4h}$ [1] トナル。

註1) D' が円ナルトキ Schlwarz ノ定理カラ $\frac{1}{h} \geqq |f'(0)|$ ナルコトが出ル。

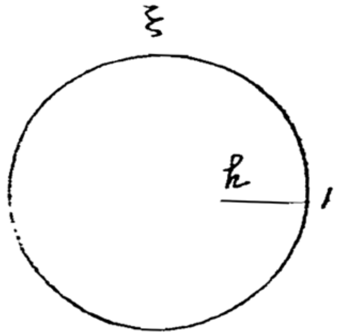
(3)ニツイテハ次ノ様ナ事實ガ成立スル。$|\zeta|<1$ ニ Schlitz ヲ入レルトキ實軸ノ $(h,1)$ ノ部分ニ入レル代リニ円周上ニ任意ニ一点 b ヲトリ、h ト b トヲ通過シテ單位円ニ直交スル円ニ沿フテ Schlitz ヲ入レル。コノ領域ヲGトシテGヲ z 平面上ノ單位円ニ寫像スル函数ヲ $\zeta=f(z)$ トスル。然ルトキハ、b ノ位置ニ関セズ



$$\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|_{z=0}=\frac{4h}{(1+h)^2}$$

デアル。

証明：　計算スレバ出來ル。先ヅGヲ ξ 平面上ノ単位円ニ實軸ノ $(h,1)$ ノ部分ニ Schlitz ヲ入レタ領域ニ寫像スル。ソノ変換函数ハ次ノ一次函数デアル。



$$\frac{\zeta-h}{1-h\zeta}=e^{i\theta}\frac{\xi-h}{1-h\xi}$$

$\zeta=b$ ナルトキ $\xi=1$ デナケレバナラヌカラ $e^{i\theta}=\frac{b-h}{1-hb}$ 1)。Gノ Schlitz (h,b) ハ ξ 平面ノ Schlitz $(h,1)$ ニ移ルガ、等角性ニヨリ、コレハ $|\xi|=1$ ニ垂直デナケレバナラヌカラ Schlitz $(h,1)$ ハ直線デアル。コノ変換ニヨリ $\zeta=0$ ハ $\xi=\frac{h(1-e^{i\theta})}{h^2-e^{i\theta}}(=k)$ ニ對應スル。次ニ $t^2=\frac{k-\xi}{1-k\xi}$ ニヨリ、

註1) $b=-1$ デアルト $\zeta=0$ ガ Schlitz ノ上ニ來ルカラ、$b\neq-1$、従ッテ $\theta\neq\pi$

ξ平面ノ領域ハ t 平面ノ単位円ノ右半分ニウツサレル。

$\xi=k$ ハ $t=\sqrt{\dfrac{h-k}{1-hk}}\,(=c)$ ニ對應スル。平方根ハソノ實数部ガ正ナル方ヲ取ル。半円ハ $z=-\dfrac{t-c}{1-\bar{c}t}\cdot\dfrac{1+\bar{c}t}{t+c}$ ニヨリ z 平面ノ単位円ニ寫像セラレ，$t=c$ ト $z=0$ トハ對應スル。ソコデ

$$\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{z=0}=\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_{\xi=k}\left(\frac{d\xi}{dt}\right)_{t=c}\left(\frac{dt}{dz}\right)_{z=0}$$

デアルカラ、右辺ノ各因数ヲ計算スルト

$$\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)_{\xi=k}=\frac{e^{i\theta}}{(1-kh)^2}$$

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)_{t=c}=\frac{2c(1-kh)^2}{h^2-1}$$

$$\left(\frac{dt}{dz}\right)_{z=0}=\frac{-2c(1-|c|^2)}{1+|c|^2}$$

又 $h-k=\dfrac{h(h^2-1)}{h^2-e^{i\theta}}$, $1-kh=\dfrac{(h^2-1)\,e^{i\theta}}{h^2-e^{i\theta}}$ カラ

$$c=\sqrt{he^{-i\theta}}\,{}^{2)},\ |c|=\sqrt{h}$$

コレラヲモトノ式ニ代入シテ

$$\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{z=0}=\frac{4h}{(1+h)^2}$$

——(計算終)——

註2) $t^2=e^{-i\theta}\dfrac{h-\zeta}{1-h\zeta}$ カラスグニ出ル。ζヨリξニ移ル Transformation ハ h ヲ中心トスル単位円ノ nicht euklidische Drehung デアル。

故ニ(3)ニ於テ Schlitz ガ $(k,1)$ ナルトキニ限ッテ $\left(\frac{dz}{d\zeta}\right)_{\zeta=0}$ ガ最小トナルノデナクテハナクテ円周上ニ b ヲ勝手ニトルトキ k, b ヲ通ル直交円ニ沿フテ Schlitz ヲ入レルトキ最小トナリ b, k ヲムスブ任意ノ Jordan 曲線ニ沿フテ Schlitz ヲ入レタトキハ原点ニ於ケル Abbildungsmodul ガ $(1+k)^2/4k$ ヨリ大トナルノデハナイカト思ハレル。

猶、次ノコトモ云ヘル。上デハ円ノ半径ガ 1 デアッタケレドモ、コレヲ $R\ (R>k)$ トシテ z 平面ノ単位円ニ寫像スルコトヲ考ヘレバ変換函数ハ次ノ通リデアル。

$$(5.1)\qquad t^2=\frac{R^2(k-\zeta)}{R^2-k\zeta}$$

$$(5.2)\qquad z=-\frac{t-\sqrt{k}}{R-\sqrt{k}\,t}\cdot\frac{R+\sqrt{k}\,t}{t+\sqrt{k}}$$

$$(5.3)\qquad \left(\frac{d\zeta}{dz}\right)_{z=0}=\frac{4kR^2}{(R+k)^2}$$

(5)ハ ζ 平面上ノ半径 R ナル円ニ (k,R) ノ実軸ノ部分ニ Schlitz ヲ入レタ領域ヲ t 平面ノ半径 $\sqrt{R}$ ナル右半円ニ寫像スル。(5,1), (5,2) ニ於テ ζ, t ヲ固定シテ $R\longrightarrow\infty$ $k=1$ ナラシムレバ, 夫々

$$t^2=1-\zeta$$

$$z=-\frac{t-1}{t+1}$$

トナル。コレハ Koebe ノ Extremalfunktion デアル。又 (5.3) ハ $\left(\frac{dS}{dz}\right)_{z=0}=4$ トナルカラ (3) ガ正シケレバ (2) ヲ生ジ、従ッテ (3) ハ Koebe ノ定理ヲフクムコトニナル。

猶、附言スルナラバ (3) ガ刻下ノ問題トナシ得ルカ否カゞ問題デアル。(3) ガウソデアレバ始メカラ話ニナラナイガ (3) ガ眞トシテモソレガ、現在知ラレテヰル知識ヲ色々ニ組合ハセテ、引キ出セナケレバナラナイ。誰ニモ出來ナイ様ナ困難ナ問題ヲ提出スルコトハ左程六ヶ敷ク ハナイガ解ケナイ問題デハ仕方ガナイ。現在比較的容易ニ証明出來ナケレバナラナイ。

又問題ニスルニシテモ、ソレガ利益アル問題，即チ既ニ知ラレテヰル知識ヲ更ニ啓発スルヤウナモノデナケレバナラナイ。上ニ (3) ヲ提出シテ二、三ノ考察ヲ試ミタケレドモ、ソレハ (3) ガモットモナ問題デアルカ否カヲ調ベタノデアッテ“此処ニ問題ガアル”ト云ッテ吹聴スル積リハ筆者ニ少シモ無イコトヲ特ニオコトワリスル。

又文献ニ暗イ筆者ノコトデアルカラ、トウニ知レテヰルコトヲ得タト述ベテヰルヤウナ箇所モアルカモ知レナイ。讀者諸賢ノ御寛容ヲ切願シマス。