611. Hilbert 空間ニ於ケル Linear translatable functional equation (II)

北川　敏男(阪大)

(I)ニ於テハ，問題ノ起リトソレニ對スルーツノ結果トヲ述ベタ。(II)以下ハソノ結果ノ證明デアル。ソレニ先立ッテ§3假定 e) ハ次ノ如ク書キ改メテオク： 假定 e) Γ_t^ν ハ Γ_t ヲν回 iterate シタ Operation ヲ意味シ，Γ_t ノ Weighting function ハ有限區間 $[\alpha, \beta]$ ニ distribute サレテヲリ．

$$(10)\quad G(\lambda)=\int_\alpha^\beta e^{\lambda t}dq(t)$$

トオクトキ

$$(11)\quad G(\lambda)=\sum_{s=1}^{m}A_s(\lambda)\,e^{\lambda\alpha_s}$$

コヽニ

$$(12)\quad A_{\nu,s}(\lambda)=a_{\nu,s}+\epsilon(\lambda)$$

$\epsilon(\lambda)$ ハ $|\lambda|\to\infty$ ト共ニ一様ニ零ニナル函數ヲ表ハス。$(s=0,1,2,\cdots\cdots,n)$ デアル。($m=1$ デアルカモ知レヌ)　　〔以上〕

I. 特殊化

〔注意〕: コヽデハ記述ヲ簡單ニスルコトガ望マシイカラ $G(\lambda)=e^\lambda$ トイフ極メテ特殊ナ場合ニツイテ證明ヲノベル。然ル後一般ノ場合ヲ附言スルコトニスル。

5. §4ニ述ベタ如ク、Cases I & II ヲ論ズレバ足リル。Case I ハ簡単ニ処理シウル。h_y ガ一次元ノトキニハ、$\varphi(t)=a(t)\psi_0$ ナル numerically-valued ナ函数 $a(t)$ ニ関スル Linear translatable functional equation ニナルカラ、定理ノ成立ハ容易ニ示サレル。頁数節約上之ヲコヽデハ省ク。

6. ソコデ Case II ニ移ラウ。x ヲ固定シテ、λ ニ関スル方程式

$$(19)\quad \sum_{\nu=0}^{n} F_\nu(x)\bigl(G(\lambda)\bigr)^\nu = 0 \qquad (G(\lambda)\equiv e^\lambda)$$

ヲ x ニ於ケル characteristic equation ト呼ビ、コレノ全体ヲ x ニ於ケル (19) ノ λ-spectrum トイヒ、$S_x(\lambda)$ デ示ス。

今変換

$$(20)\quad G(\lambda)\equiv e^\lambda = \rho$$

ヲ施ス。然ルトキ、(19) ヲトクコトハ、(20) ト

$$(21)\quad \sum_{\nu=0}^{n} F_\nu(x)\rho^\nu = 0$$

トヲトクコトニ帰スル。コノ形ノ方程式ニ関シテハ [C] p. 278 ニ於テ論ジタ所デアッテ、ソノ結果ヲコヽニ採用スルト次ノ特殊化ヲウル。

但シ、集合 $S_x(\rho)$ ノ極座標系 (R, Θ) ヘノ射影ヲ夫々 $R[S_x(\rho)]$, $\Theta[S_x(\rho)]$ デ表ハス。（勿論コレハ x ト共ニ一般ニカワル集合デアル）

〔特殊化1〕 "Case II ニ於テハ，次ノ如ク假定シテモ構ハナイ；即チ函数 $r_h(x)$, $\theta_j(x)$, 實数 $\bar{r}_h$, $\bar{\theta}_j$, $\bar{\delta}$ ($h=0, \pm 1, \cdots\cdots, \pm n$; $j=1, 2, \cdots\cdots, n$) ガ存在シテ次ノ條件ヲ充ストト假定シテモ構ハナイ。

(1°) (21) ナル方程式ニツイテノ $R[S_x(\rho)]$, $\Theta[S_x(\rho)]$ ハ各 x ニツイテ夫々 $\{r_h(x)\}$ ($h=0, \pm 1, \cdots\cdots, \pm n$), $\{\theta_j(x)\}$ ($j=1, 2, \cdots\cdots, n$) ナル集合ニ含マレテキル。

(2°) x ガ M ヲ動クトキ常ニ

$$|r_h(x)-\bar{r}_h|<\bar{\delta} \qquad |\theta_j(x)-\bar{\theta}_j|<\bar{\delta}$$

$$\bar{r}_{h+1}>\bar{r}_h+4\bar{\delta} \qquad \bar{\theta}_{j+1}>\bar{\theta}_j+4\bar{\delta}$$

更ニ $r_0(x)=\bar{r}_0=0.$"

サテ今 $G(\lambda)\equiv e^{\lambda}$ トシタカテ (22) ノ根ハ $\log_e r_h(x)+i(\theta_j(x)+2m\pi)$ ノ形ニカイタモノニ含マレル。$m=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots$ デアル。ソコデ変換 (20) ニヨッテ、特殊化1カラシテ次ノ特殊化2ニ至ル。

〔特殊化2〕 "Case 2°) ニ於テハ，次ノ如クナッテキルト假定シテモヨイ。即チ S_x ノスベテノ元ヲベ，絶對値並ニ偏角ノ順ニ並ベルトキ

(i) 有界可測函数ノ三系列

$$\lambda_i(x) \quad (i=0,1,2,\cdots\cdots) \qquad r_h(x) \quad (h=0,1,2,\cdots\cdots)$$

$$\beta_j(x) \quad (j=1,2,3,\cdots\cdots)$$

(但シ並ニ $\lambda_i(x)$ ハ複素数値，$\beta_j(x)$, $r_h(x)$ ハ實数値デアル)

(ii) 實數列ノ二組

$$\overline{\gamma}_h \ (h=0,1,2,\cdots\cdots) \qquad \overline{\beta}_j \ (j=1,2,3,\cdots\cdots)$$

並ビニ正数 $\overline{\delta}$.

(iii) 整数列ノ二組

$$h(i),\ j(i),\quad (i=0,1,2,3,\cdots\cdots)$$

ガ存在シテ次ノ性質ヲモツト假定シテモヨイ。ソノ性質トハ

(1°) Mノ各 x ニ對シテ、$\lambda_0(x), \lambda_1(x), \cdots\cdots, \lambda_n(x), \cdots\cdots$ ハ絶對値並ニ偏角ノ順序ニ並ンデヰル。

(2°) Mノ各 x ニ對シテ、S_x ハ $\{\lambda_i(x)\}$ $(i=0,1,2,\cdots\cdots)$ ナル集合ニ含マレル。(必ズシモ一致スルトイフノデハナイ)

$h=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots,\ j=1,2,3,\cdots\cdots$ ニ對シテ

(3°) $|\gamma_h(x)-\overline{\gamma}_h|<\overline{\delta},\qquad |\beta_j(x)-\overline{\beta}_j|<\overline{\delta}$

$$\overline{\gamma}_{h+1}>\overline{\gamma}_h+4\overline{\delta},\qquad \overline{\beta}_{j+1}>\overline{\beta}_j+4\overline{\delta}$$

尚 $\gamma_0(x)=\overline{\gamma}_0=0$、而シテ各 $\lambda_i(x)$ ニ對シテハ, $x\in M$ ナルトキ常ニ

$$\lambda_i(x)=\gamma_{h(i)}(x)+i\beta_{j(i)}(x)$$

トナル様ナ $h(i), j(i)$ ガ對應スル。

(4°) x ガMヲウゴク間, $\lambda_n(x)$ ハ中心 $\overline{\gamma}_{h(n)}+i\beta_{j(n)}$ 半徑 $2\overline{\delta}$ ノ円 $C_{\overline{\gamma}_{h(n)},\,\overline{\beta}_{j(n)},\,2\overline{\delta}}$ ノ内部ニトドマル。"

コノ Specialization ノ結果トシテ、自然数 n ヲ如何ニアタヘテモ, λ-plane 上ニ contour $\mathbb{C}$ ヲ x ニ無関係ニエラビ, x ガMヲ動ク間, (i) $\mathbb{C}$ ハ $\lambda_0(x), \cdots\cdots,$

$\lambda_n(x)$ ヲソノ内部ニオサメ (ii) $\lambda_{n+1}(x), \lambda_{n+2}(x), \cdots\cdots$ ハ悉ク $\mathbb{C}$ ノ外部ニアリ (iii) $\mathbb{C}$ ト $\{\lambda_n(x)\}$ トノ距離ハ x ニ無関係ナ一定正数ヨリ大デアル——トイフヤウニ出来ル。

今便宜上

$$(22)\quad \mathop{\Lambda}_{t}{}^{x}_{\xi}\left[\varphi(\xi,x)\right] \equiv \sum_{\nu=0}^{n} F_\nu(x) \int_\alpha^\beta \varphi(\xi+t,x)\,dg_\nu(\xi)$$

トオキ、上ノ如クトッタ $\mathbb{C}$ ニツイテ

$$(23)\quad S_{\mathbb{C}}^{x}(t,t_0;f) \equiv \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathbb{C}} \frac{e^{\lambda t}}{G(x,\lambda)} \mathop{\Lambda}_{0}{}^{x}_{\xi}\left[e^{\lambda\xi}\int_{t_0}^{t_0+\xi} e^{-\lambda\eta}\varphi(\eta,x)\,d\eta\right] d\lambda$$

ヲ M ノ各 x ニツイテツクル。然ルトキコレガ

$$(24)\quad \sum_{i=0}^{N(\mathbb{C})} \sum_{\rho=0}^{n_i-1} a_{i,\rho}(x,t_0)\, t^\rho e^{\lambda_i(x)t}$$

トナルベキコトハ明カデアル。コヽニ、$a_{i,\rho}(x,t_0)$ ガ可測ニシテ、又 $G(x,\lambda_i(x)) \neq 0$ ナル如キ点 $x(\in M)$ ニ於テハ、$a_{i,\rho}(x,t_0)=0$ トナルベキコトモ論ヲ俟タナイ。[16] 吾人ハ (23) ヲ以テ、(t,x) 空間ニ於ケル Cauchy 級数ノ $\mathbb{C}$—切断ト呼ブコトニシヤウ。[17] $\{\mathbb{C}_r\}$ ヲ上ノ如キ $\mathbb{C}$ カラナル系列デ $\mathbb{C}_r$ ハ $\mathbb{C}_{r+1}$ ノ内部ニ含マレ、$r\to\infty$ ノトキニハ全平面ニ擴ガル様ニトレバ

---

(16) $G(x,\lambda_i(x))=0$ ナル x ニ対シテモ、$a_{i,\rho}(x,t_0)$ ノアルモノハ零デアルカモ知レナイ。コノ点 Cauchy 級数展開法ハ Fourier 級数ノソレニ近ク、Almost periodic function ノ展開トハ違ツテキル。

(17) [T] p. 237 参照。

$$(25)\quad \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\rho=0}^{n_i-1} a_{i,\rho}(x,t_0)\, t^{\rho} e^{\lambda_i(x)t}$$

ガ得ラレマウ。

6. 以上，多少ノ工夫ノノチ、トモカク〔C〕ニ於ケルマウナ工作ヲ施シテ進ンデキタ。コレカラハ，$\varphi(t,x)$ ガ方程式ヲ消スコト，有界デアル事，更ニ Compact デアルコト等ヲ逐次使用シテ、次ノ特殊化3ニ導キウルコトヲ示サウト思フ。

補助定理2： 特殊化2ニ於テ、$a_{\rho,\nu}(x,t_0)$ ハ M ノ殆ンドスベテノ x ニツイテ、t_0 ニ無関係デアル。

証明： 任意ノ t_0^1, t_0^2 ヲ考ヘテ、$S_{\mathfrak{C}}^{x}(t,t_0^1;\varphi)-S_{\mathfrak{C}}^{x}(t,t_0^2;\varphi)$ ガ零ニナルコトヲイヘバヨイ。コヽデ、$\varphi(t,x)$ ガ解ナルコト即チ $\Lambda_{0\xi}^{x}[\varphi(t+\xi,x)]=0$ $(-\infty<t<\infty$ ニテ；殆ンドスベテノ x ニツイテ）ナルコトヲ使用スル。

補助定理3： $n(i)\neq 0$ ナラバ，特殊化2ニ於テ、殆ンドスベテノ x ニツイテ

$$a_{i,\rho}(x,t_0)=0$$

証明： $G(x,\lambda_i(x))\neq 0$ ナルマウナ点 x ニテハ，$a_{i,\rho}(x,t_0)=0$ トシタカラ問題ハナイ。$G(x,\lambda_i(x))=0$ トシ，簡単ノタメ、単根即チ $G_\lambda'(x,\lambda_i(x))\neq 0$ ナルマウナ x ヲ考ヘヨウ。（複根デモ次ノ議論ヲ少シ modify スレバヨイ）スルト

$$a_{i,0}(x,t_0)=\frac{1}{G_\lambda'(x,\lambda_i(x))}\Lambda_{0\xi}^{x}\left[e^{\lambda_i(x)\xi}\int_{t_0}^{t_0+\xi} e^{-\lambda_i(x)\eta}\varphi(\eta,x)\,d\eta\right]$$

先ヅ $h(i)>0$ トシヨウ。シカルトキニハ，t_0 ヲ正ニ充分大キクトレバ

$$\left|e^{\lambda_i(x)\xi}\int_{t_0}^{t_0+\xi} e^{-\lambda_i(x)\eta}\varphi(\eta,x)d\eta\right| \leqq \left|\int_{t_0}^{t_0+\xi} e^{(\overline{\gamma}_{h(i)}-\overline{\delta})(\xi-\eta)}|\varphi(\eta,x)|d\eta\right|$$

コヽニ $\overline{\gamma}_{h(i)}-\overline{\delta}>0$ ナルコトニ注意セヨ。サテ，コレカラ

$$\int_M \left|\int_{t_0}^{t_0+\xi} e^{(\overline{\gamma}_{h(i)}-\overline{\delta})(\xi-\eta)}|\varphi(\eta,x)|d\eta\right|^2 dx$$

$$\leqq \frac{\left|e^{-2(\overline{\gamma}_{h(i)}-\overline{\delta})t_0}-e^{-2(\overline{\gamma}_{h(i)}-\overline{\delta})(\xi-t_0)}\right|}{2(\overline{\gamma}_{h(i)}-\overline{\delta})}\left|\int_{t_0}^{t_0+\xi}\|\varphi_\eta\|^2 d\eta\right|$$

ヲウル。コヽニ於テ $t_0\to\infty$ トスレバ，$\|\varphi_t\|$ ガ有界ナルコトカラ上式ハ零ニナル。從ツテ

$$\lim_{t_0\to\infty}\|a_{i,0}(x,t_0)\|=0$$

トナラネバナラヌ。シカルニ、$a_{i,0}(x,t_0)$ ハ殆ンドスベテノ x ニツキ t_0 ニ無関係ナモノデアル。

$\|a_{i,0}(x,t_0)\|$ 又然リ。ヨツテ上式カラ $\|a_{i,0}(x,t_0)\|$ ハ零ナラネバナラヌ。

以上ニ於テハ $h(i)>0$ トシタガ、$h(i)<0$ ナラバ $t_0\to-\infty$ ニシテヤレバヨロシイ。 (証明了)

今、$S_{\mathfrak{C}}^x(t,t_0;\varphi)$ トハ少シクコトナツタ

$$\widetilde{S}_{\mathfrak{C}}^x(t,0;\varphi)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathfrak{C}}\frac{\Delta_{0\xi}^x\left[e^{\lambda\xi}\int_0^\xi\varphi(t+\xi,x)e^{-\lambda\eta}d\eta\right]}{G(x,\lambda)}d\lambda$$

ヲ導入スル。

補助定理４： *Specialization* ２ニ於テハ，M ニ属スル各ンドスベテノ x ニツキ

$$\widetilde{S}_{\mathfrak{C}}^{x}(t,0;\varphi)=S_{\mathfrak{C}}^{x}(t,0;\varphi)$$

而シテ、$\widetilde{S}_{\mathfrak{C}}^{x}(t,0;\varphi)$ ハ（$\varphi(t,x)$ ト同様ニ）L_M^2 ニ於イテ *uniformly continuous* 且ツ *compact* デアル。

証明： 前半ハ，補助定理２ト同様ニ証明サレル。後半ヲ示スノニハ，

$$\bigwedge_{0}^{x}{}_{\xi}\left[e^{\lambda\xi}\int_{0}^{\xi}\varphi(t+\eta,x)e^{-\lambda\eta}d\eta\right]$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n}F_{\nu}(x)e^{\lambda\nu}\int_{0}^{\nu}\varphi(t+\eta,x)^{-\lambda\eta}d\eta$$

ノ形デアリ、コレハ，L_M^2 ニ於テ *uniformly continuous* 且ツ *compact*； コレヲ有界ナトコロニアル正則曲線 $\mathfrak{C}$ ノ上デ積分スルコトニヨリ明ラカデアル。

次ニ、N. Wiener ニ従ヒ，$\varphi_{\sigma,\delta}(x)$ ハ $-\infty<x<\infty$ ノスベテノ点デ無限回微分可能デ

$$\begin{cases} 1^\circ \quad \varphi_{\sigma,\delta}(x)=1; & \sigma-\delta\leqq x\leqq\sigma+\delta \\ 2^\circ \quad \varphi_{\sigma,\delta}(x)=0; & x>\sigma+2\delta \\ 3^\circ \quad \varphi_{\sigma,\delta}(x)=0; & x<\sigma-2\delta \\ 4^\circ \quad \varphi_{\sigma,\delta}^{(p)}(\sigma\pm2\delta)=\varphi_{\sigma,\delta}^{(p)}(\sigma\pm\delta)=0 & (p\geqq1) \end{cases}$$

ナラシメ，次ノ如クオク。

$$w_{\sigma,\delta}(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{\sigma,\delta}(u)e^{isu}du$$

$$f_{\sigma,\delta}(t,x)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s,x)\,w_{\sigma,\delta}(t+s)\,ds$$

<u>補助定理5</u>. $v(t,x)$ ハ $-\infty<t<\infty$ デ定義サレ，各 t ニ對シテハ，L_M^2 ニ屬スルトスル。$\|v_t\|=\sqrt{\int|v(t,x)|^2dx}$ ノ topology デ t ノ函數トシテ uniformly continuous デアリ、M, v_t $(-\infty<t<\infty)$ ノツクル集合ハ compact デアルトスル。

$w(t)$ ヲ複素數値函數トシテ $\int_{-\infty}|w(t)|\,dt<\infty$ トスル。然ルトキ

(i) $$\eta(t,x)=\int_{-\infty}^{\infty}v(t+s,x)\,w(s)\,ds$$

(ii) $$\Lambda_{0\,\xi}^{x}\Big[e^{\lambda\xi}\int_0^{\xi}\eta(t+\xi,x)\,e^{-\lambda\xi}d\xi\Big]$$

又同樣ニ uniformly continuous 且ツ compact デアル、(ii) ハ

(iii) $$\int_{-\infty}^{\infty}\Lambda_{\xi}^{x}\Big[e^{\lambda\xi}\int_0^{\xi}v(t+s+\xi,x)\,e^{-\lambda\xi}d\xi\Big]\,w(s)\,ds$$

ニ等シクナル。

證明: (i) ハ [C] ニ與ヘテアル。(ii), (iii) ハ容易.

<u>補助定理5</u>、特殊化2ノ假定ノモトニ於テ、$\mathfrak{C}_{0,\bar{\beta}_n,2\bar{\delta}}$ ノ代リニ、單ニ $\mathfrak{C}$ トカケバ

(i) $$\sum_{\rho=0}^{n-1}a_{i,\rho}(x)\,t^{\rho}e^{i\beta_n(x)t};\ [h(i)=0;\ j(i)=n]$$

(ii) $$S_{\mathfrak{C}}^{x}(t,0;\varphi)$$

(iii) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} W_{\bar{\beta}_n, 2\bar{\delta}}(t+\sigma) S_{\mathbb{C}}^{x}(\sigma, 0; \varphi)\, d\sigma$

(iv) $S_{\mathbb{C}}^{x}(t, 0; \varphi_{\bar{\beta}_n, 2\bar{\delta}})$

ノ四ツハ悉ク相等シイ。

証明： 特殊化2並ビニ $\mathbb{C}$ ノ定義ニヨリ、(i) ハ (ii) ニ等シイ。

[C] Lemma 8 (p.280) ニヨッテ

$$\overline{\lim_{|t|\to\infty}} \frac{\| S_{\mathbb{C}}^{x}(t, 0; \varphi) \|}{|t|^n} < \infty$$

依ッテ、殆ンドスベテノ x ニ對シテ

$$\left| S_{\mathbb{C}}^{x}(t, 0; \varphi) \right| < B(x)\left(|t|^n + 1 \right)$$

ナル $0 < B(x) < \infty$ ガ得ラレル。ソコデ Wiener ノ理論ニ依ッテ積分 (iii) ガ存在シテ、コレガ (ii) ニ等シイ。(iii) ト (iv) トハ積分ノ順序交換ニヨッテ得ラレル。

<u>補助定理6.</u> $\rho \geqq 1$ トス。然ルトキニハ，特殊化3ノモトデハ，殆ンドスベテノ x ニ對シテ $a_{i,\rho}(x) = 0$ デアル。

証明： 補助定理3ニヨッテ $j(i) = 0$ デアルヤウナ $a_{i,\rho}(x)$ ノミヲ考ヘレバヨロシイ。Lemma 5ニヨリ、ソコノ (i) ハ (iv) ニ等シイ。(iv) ハ補助定理4及ビ5ニ依ッテ $-\infty < t < +\infty$ ニ於テ、L_M^2 ノ topology ノ意味デ有界デアル。依ッテ Lemma 8 in [C] p.280 ニヨッテ、$\rho \geqq 1$ ニ對シテハ，$a_{i,\rho}(x) = 0$ ガ殆ンドスベテノ x ニツイテ成立セネバナラヌ。

依ツテ、補助定理6マデノ結果トシテ、$\varphi(t,x)$，(t,x)ニ関スル Cauchy 級数ハ

$$\varphi(t,x)\sim\sum_{\nu=0}^{\infty}a_{\nu,0}(x)\,e^{i\beta_\nu(x)t}$$

ノ形ニナルコトヲ知ル。

<u>補助定理7.</u> 相素ナル可測集合系 M^*, M_1, M_2, ------- ---, M_n, ------- ガアツテ、各 $\beta_\nu(x)$ ハ各々、スベテノ M_n デ const. デアリ、M^* ニ於テハ殆ンド至ルトコロデ、各々 $a_{\nu,0}(x)=0$ デアルトイフヤウニ、$M=M^*+M_1+M_2+$ ----- ニスルコトが出来ル。

証明：　補助定理6ニヨリ

$$S_{\mathfrak{C}_i}^{x}(t,0;\varphi)=a_{\nu,0}(x)e^{i\beta_\nu(x)t}$$

トナル。補助定理4ニヨリ、左辺ハ $-\infty<t<\infty$ デ L_M^2 ノ strong topology デ compact ダカラ [C] Lemma 11 p.283 ニ由ツテ

$$M=M_\nu^*+M_{\nu,1}+M_{,2}+\cdots\cdots+M_{\nu,n}+\cdots\cdots$$

ナル（ν ニ depend シタ）上ノ性質ヲモツタワケカタ（D_ν）カアル。$\nu=0,1,2,3,$ --------- デアツテ無限ダデアルケレドモ，$\beta_\nu(x)$ ノ定義ニカヘテ考ヘテミルト，

$\beta_\nu(x)$ ノ定義カラ、$G(x,i\beta_\nu(x))\neq 0$ デアルヤウナ x デハ，$a_{\nu,0}(x)=0$ デアルシ，$G(x,\beta_\nu(x))=0$ デアルヤウナ x デハ，$a\,\nu 0(x)=0$ デアルシ、$G(x,\beta_\nu(x))=0$ デアル様ナ x ニ對シテハ，即チ

$$\sum_{k=0}^{m} F_k(x)\, e^{k i\beta_\nu(x)} = 0$$

ダカラ前ノ場合ハ問題ハナク，後ノ場合ニハ $\theta_1(x)$, $\theta_2(x)$, ------, $\theta_n(x)$ ガアッテ

$$\beta_\nu(x) = \theta_{k(\nu)}(x) + 2m(\nu) i\pi$$

トナルヤウナ $1 \leqq k(\nu) \leqq n$, $m(\nu)$ ガキユル。ダカラ、分ケ方 $[D_\nu]$ ($\nu = 1, 2,$ ------) ノウチ相異ナルモノハ有限箇シカナイ。依ツテ、ソノ相異ナル有限箇ノワケ方全部ヲ一所ニシテ出来ルワケカタヲ考ヘルト，ソレが求ムルワケ方デアルコトがワカル。

以上ノ結果ニヨリ、吾々ハ次ノ如キ最後ノ特殊化ニ到達スル。

[特殊化 3] "特殊化 2 ニ於テ

$$\varphi(t, x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x) e^{i\beta_n t}$$

ナル對應がツキ。（コヽニ、$\psi_n(x) \in L_2^M$, β_n ハ実数デ t ニモ, x ニモ無関係）次ノヤウニナツテキルト仮定シテモヨイ。

$$\begin{cases} 1^\circ & \displaystyle\sum_{\nu=0}^{m} e^{i\beta_n \nu} A_\nu \psi_n(x) = 0 \\ 2^\circ & \text{常数 } F_0, F_1, F_2, \text{------}, F_n \text{ ガアッテ} \end{cases}$$

$$\Lambda \varphi_t \equiv \sum_{\nu=0}^{m} F_\nu \varphi(t+\nu)$$

ト書クトキ，$\Lambda \varphi_t = 0$ $(-\infty < t < \infty)$ デアリ、上ノ展開ハコノ Λ ニ関スル Cauchy 展開ニナツテキル。"

証明：　$1°$ ニツイテハ証明ヲ要シナイデアロウ。$2°$ ニ関シテハ，$i\beta_\nu(x)$ ハ　$\sum e^{ik\beta_\nu(x)} F_\nu(x)=0$ デアルトシテヨイデアルカラ $\beta_\nu(x)=\beta_\nu$（常数）ニ對シテハ，$F_\nu(x)=F_\nu$（常数）ト考ヘテヨイコトニ注意シサヘスレバ充分デアル。