610. 円，球ノ幾何

松村　宗治（台北大）

(I) 三次元 Euklid 空間内ニ一ツノ球ガアッテソレニ関スル Inversion ヲ考ヘルコトニスル。

E, F, G; E_0, F_0, G_0 ヲバ変換サレタ表面並ニ原表面

ノ第一基本量トセバ

$$(1)\quad E_0=\frac{E}{r^4},\quad F_0=\frac{F}{r^4},\quad G_0=\frac{G}{r^4}$$

ガ成立ツ、コヽニ r ハ考ヘル基本球ノ半径デアル。

(1)ガ成立スル故ニ次ノコトガイヘル。

円系表面ガ Inversion ニヨリテ他ノ円系表面ニ変換サルルナラバ

$$(2)\quad (\theta_u\theta_u)_0\,du^2+2(\theta_u\theta_v)_0\,du\,dv+(\theta_v\theta_v)_0\,dv^2=0$$

ナル極小線ハ

$$(3)\quad (\theta_u\theta_u)\,du^2+2(\theta_u\theta_v)\,du\,dv+(\theta_v\theta_v)\,dv^2=0$$

ナル極小線ニ変換サル。

コヽニ $(\theta_u\theta_u)_0$, $(\theta_u\theta_v)_0$, $(\theta_v\theta_v)_0$; $(\theta_u\theta_u)$, $(\theta_u\theta_v)$, $(\theta_v\theta_v)$ ハソレゾレ原ノ円系表面並ニ変換サレシ後ノ円系表面ノ例ノ吾々ノ基本量デアル。

尚、亦各任意ノ Inversion ニ對シテ二次微分形式

$$I=\frac{(\theta_u\theta_u)\,du^2+2(\theta_u\theta_v)\,du\,dv+(\theta_v\theta_v)\,dv^2}{\sqrt{(\theta_u\theta_u)(\theta_v\theta_v)-(\theta_u\theta_v)^2}}$$

ハ不変式トナル。

(II) 円系表面ヲ例ノヤウニ考ヘルト其ノ Netzwinkel ヲ ω トセバ

$$\cos\omega=\frac{(\theta_u\theta_v)}{\sqrt{(\theta_u\theta_u)(\theta_v\theta_v)}}$$

デアルカラ

$$\frac{1}{\cos^2\frac{\omega}{2}} = 2\,\frac{1-\cos\omega}{1-\cos^2\omega}$$

$$= 2\,\frac{1-\dfrac{(\theta_u\theta_v)}{\sqrt{(\theta_u\theta_u)(\theta_v\theta_v)}}}{1-\dfrac{(\theta_u\theta_v)^2}{(\theta_u\theta_u)(\theta_v\theta_v)}}$$

$$= \frac{(\theta_u\theta_u)(\theta_v\theta_v)-2(\theta_u\theta_v)\sqrt{(\theta_u\theta_u)(\theta_v\theta_v)}+(\theta_u\theta_u)(\theta_v\theta_v)}{(\theta_u\theta_u)(\theta_v\theta_v)-(\theta_u\theta_v)^2}$$

ガ成立ツコト明デアル。

(III) 余ハ以前三次元 Euclid 空間内ノ円ノ對ヲ考ヘテ

$$(1)\quad \{\mathfrak{z},\ \mathfrak{z}+d\mathfrak{z}\},\ \{\mathfrak{y},\ \mathfrak{y}+d\mathfrak{y}\}$$

ナル円ノ對ヲ考ヘタコトガアル。

コヽニ $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{y}$ ハコノ空間内ノ球デアル、今吾々ハ (1) ノ代リニ

$$(2)\quad \{\mathfrak{z},\ \mathfrak{y}+d\mathfrak{y}\},\ \{\mathfrak{y},\ \mathfrak{z}+d\mathfrak{z}\}$$

ヲ考ヘルトキハ下ノコトガイヘル。

$$(3)\quad \|\mathfrak{z},\ d\mathfrak{z},\ \mathfrak{y},\ d\mathfrak{y}\| \equiv 0$$

ナル Matrix ノ関係ガ成立ツナラベ

$$(4)\quad \begin{cases} \sigma\mathfrak{z} = \bar{\sigma}\, d\mathfrak{z}, \\ \lambda\mathfrak{y} = \bar{\lambda}\, d\mathfrak{y} \end{cases}$$

ガ成立ツ、コヽニ σ, $\bar{\sigma}$, λ, $\bar{\lambda}$ ハ Skalar Grössen デアル。

$$\mathfrak{z} = \| \mathfrak{y}, d\mathfrak{y}, \bar{\mathfrak{y}}, d\bar{\mathfrak{y}} \|$$

ハ (2) ナル二ツノ円ノ共通ノ垂直球デアル。

斯クノ如クシテ余ガ以前論ゼシ $\mathfrak{y}^{\alpha}$, $\bar{\mathfrak{y}}^{\lambda}$, $(\alpha, \lambda = \mathrm{I}, \mathrm{II})$ ノ場合ヲ少シク変更シテ考ヘルトヨイコトニナル。

(IV) 表面 $\mathfrak{y}$ ノ球 ξ ニ関スル反轉表面ヲ $\mathfrak{z}$ トセバ

$$(1) \quad \mathfrak{z} = 2(\mathfrak{y}\xi)\xi - \mathfrak{y}$$

ガ成立ツ、サテ(1)ヨリ

$$(2) \quad \begin{cases} \mathfrak{z}_u = 2(\mathfrak{y}_u \xi)\xi - \mathfrak{y}_u, \\ \mathfrak{z}_v = 2(\mathfrak{y}_v \xi)\xi - \mathfrak{y}_v, \\ \mathfrak{z}_{uv} = 2(\mathfrak{y}_{uv} \xi)\xi - \mathfrak{y}_{uv}. \end{cases}$$

ガ成立ツ、コヽニ

$$\mathfrak{y}_u = \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial u}, \quad \mathfrak{y}_v = \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial v}, \quad \mathfrak{y}_{uv} = \frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial u \partial v}$$

デアル。

(2)ヨリ

$$(3) \quad \mathfrak{y}_{uv} = A(u,v)\,\mathfrak{y}_u + B(u,v)\,\mathfrak{y}_v$$

ナラバ

$$(4) \quad \mathfrak{z}_{uv} = A(u,v)\,\mathfrak{z}_u + B(u,v)\,\mathfrak{z}_v$$

ナルコトガ分ル。コノコトカラ $\mathfrak{y}$ナル表面ニ於ケル媒介曲線ガ共軛系ヲ形成セバ $\mathfrak{z}$ナル表面ニテモ然ルコトガ分ル。

以上述ベタ (3), (4) ノ外ニ次ノコトガ尚イヘル。

(1)ニ於テモシ

$$(5) \quad (\mathfrak{y}^2)_{uv} = A(\mathfrak{y}^2)_u + B(\mathfrak{y}^2)_v$$

ナラバ

(6) $(\mathfrak{z}^2)_{uv} = A(\mathfrak{z}^2)_u + B(\mathfrak{z}^2)_v$

デアル、何トナレバ吾々ハ $\mathfrak{y}_u \mathfrak{y}_v = 0$, $\mathfrak{z}_u \mathfrak{z}_v = 0$ トスルコトガ出来ルカラデアル。

以上ノコトカラ次ノコトガイヘル。

反転ニヨッテハ曲率線ハ不変デアル。

以上此等ノ定理ハ普通ノ教科書ニ見出サレルガ其ノ証明ニ於テ少シ許リ相異ガアル。