608. Hilbert空間ニ於ケル Linear translatable funktional equation (I)

北川　敏男（阪大）

緒　言

1. Bochner-Neumann[1] ハ operational diff. eq.

$$(1)\quad \sum_{\nu=0}^{n} \frac{\partial^{n-\nu}}{\partial t^{n-\nu}} A_\nu \varphi_t = 0$$

—— 茲ニ φ_t ハ $-\infty < t < \infty$ デ定義サレテ或ル與ヘラレタ Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$ ノ値ヲトル函数デアリ。A_0, A_1, ……, A_n ハ或ル性質條件ヲ具ヘタ $\mathfrak{H}$ ノ linear operators デアル —— ヲ論ジ (1) ノ Compact solution (compact トイフノハ，$\mathfrak{H}$ ノ strong topology ニ関シテデアル) ハ，展開

$$(2)\quad \varphi_t \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{i\beta_n t}$$

---

(1) S. Bochner and J. V. Neumann: On compact solutions of operational-differential equation, I, Annals Math., Vol. 36, (1935)
コノ論文ヲ〔C〕デ表ハス。Hilbert空間ノ用語ニ関シテコノ論文ニ従フ。

ヲ admit スルコト(茲ニ a_n ハ $\mathfrak{X}$ ノ elements, β_n ハ t ニ無関係ナ実数) 並ビニコノ級数ガアル種ノ grouping of terms ニヨッテ $-\infty < t < \infty$ ニ於テ uniformly conv. デアルコトヲ示シ, コレニヨッテ、カヽル解ハ almost periodic デアルトイフコトヲ示シタ。[2]

コノ結果ニ到達スル方法ハ, 本質的ニハ変数 t ノ separation トイヒ得ルデアロウ。即チ方程式 (1) ヲ粗雑ナ言ヒ方デアルが, 要スルニ、abstract space ニ於ケル常数係数ノ有限階微分方程式ト見做ソウトイフ所ニ要点がアルヤウニ思ハレル。

然ルニ常数係数ノ微分演算ハ微分又ハ移動 (translations) ト可換デアル。linear translatable operations ニ関スル結果がソレト密接ナ関係ニアルコトハ言フマデモナイ。[3] 依ッテ、次ノ問題ノ起ルノハ極メテ自然的トイハネバナラヌ。即チ Neumann-Bochner ノ結果ハ operational translatable functional eq. ニ対シテ拡張出来ナイデアロウカトイフ問題コレデアル。

然ルニ、コノ問題ニ対シテ〔C〕ニ於ケル analogy ヲ求メルコトハ, 若シ Linear translatable operations

---

(2) 〔C〕 Theorems I, II 並ビニ III.

(3) 筆者: On the theory of linear translatable functional eq. and Cauchy's series. 摂報十三巻 (1937). コノ拙論ヲ引用スルトキ〔T〕ヲ以テ示ス。

ヲ〔T〕ニ於ケル如ク一般ニトルナラバ，相當困難ガ免レナイ。此処デハ，Stieltjes type ト呼ブ特殊ノ Linear translatable operations Γ ヲ $\mathfrak{H}$ ニ於テ定義シテ operational linear translatable funct. eq. トモイフベキ

$$(3)\qquad \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu \Gamma_{\nu,t}\varphi_t = 0$$

ヲ論ジテミル。[(4)]

2. 先ヅ Stieltjes 型ノ Linear translatable operations ノ定義ヲ述ベナケレバナラヌ。ψ_t ハ，$-\infty < t < \infty$ デ定義サレテ $\mathfrak{H}$ ノ値ヲトル函数トシ，コレガ Bochner-Neumann〔C〕ニ於ケル意味デ任意ノ有限區間デ可積分デアルトスル。$\alpha \leqq s \leqq \beta$ デ定義サレテ有界変分函数デアルヤウナ複素数函数 $g(s)$ ヲ考ヘルコトニシヤウ。$\mathfrak{H}$ ノ任意ノ f ニ對シテ linear functional（t ヲ fixed シテ考ヘテ）

$$L_t(f) = \int_\alpha^\beta (\psi_{t+s}, f)\, dg(s)$$

ヲ考ヘルコトニシヤウ。Schwarz ノ不等式ニヨリ，コレハ，有界ナ Linear functional デアルカラ，F. Riesz ノヨク知ラレタ定理ニヨリ，$L_t(f) = (g_t^*, f)$ ナル f ニ無

---

(4) Stieltjes 型ノ operation トカ (3) ノ意味トカハ以下説明スルノデアル。

関係ナ，t ニハ depend スル g_t^* ガ一意ニ定マル。ソコデ

$$(4)\quad \int_\alpha^\beta \psi_{t+s}\, dg(s)$$

ハコノ g_t^* ナリト定義スル。[5]

$\Gamma\psi_t = g_t^*$ トオキ，コノ operation ヲ Stieltjes 型[6] ノ Linear translatable op. ト呼ブノデアル。コノ Operations ガ translation 並ニ任意有限区間上ノ積分ト可換ナルコトハ言フ迄モナイ。[7]

コレラノ Operations ハイロイロナ realizations ヲモツ。h_y ヲ $(x_1, x_2, \text{------})$ ナル Complex numbers ノスベテノ sequences (但シ $\sum|x_k|^2 < \infty$) カラナリ，inner product トシテハ $(f, g) = \sum f_k \overline{g_k}$ デアルヤウナ空間ニ対シテハ，$\psi_t = (x_1(t), x_2(t), \text{-------})$ トシ

$$(6)\quad \int_\alpha^\beta \psi_{t+s}\, dg(s) = (y_1(t), y_2(t), \text{-------})$$

---

(5) コヽノ議論ハ [C], Part I, Preliminaries, 1 p. 261 ト同様

(6) (4) ハ Stieltjes integral ノ形ニナッテヰルカラ。

(7) 区間 $[\alpha, \beta]$ ノ意味ハ，$s < \alpha$ 及ビ $s > \beta$ ニ対シテハ，トニカク $\varphi(s) = \text{Const}$ ダトイフコトデアル。effective range ガキッカリ $[\alpha, \beta]$ トイフノデハナイ。$-\infty < \alpha < \beta < \infty$ デアルコトヲ假定スルコトヲ明記シナケレバナラヌ。コノ時 $[\alpha, \beta]$ ニ distribute サレテヰルト言フコトニシヤウ。

トオクトキ

$$(7)\quad y_p(t)=\int_\alpha^\beta x_p(t+s)\,dg(s) \qquad (p=1,2,\cdots\cdots)$$

トナルコトハ［C］ノ議論ヲ繰返セバヨイノデアル。更ニMヲ Euclid 空間ノ可測集合トシテソノ measure 正ナルトキ，$\int_M |f(p)|^2 dv_p < \infty$ ナルヤウナ $f(p)$ ノ全体カラナル $\mathfrak{H}$（コレヲ L_M^2 デ表ハス）ニ対シテモ，［C］ノ議論ニヨリ．Linear translatable operations of Stieltjes type ノ realizations ヲ得テ［C］ト同様ノ結果ヲ得ルコトハ明カデアル。

3. コノ談話ニ於テ申上ゲヤウト思フ定理ハ，今ヤ次ノ形デ述ベエラレル。[8]

假定 a）Hilbert 空間 $\mathfrak{H}$，コノ空間ノ Linear operations $A_0, A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$；variable point $\varphi_t\ (-\infty<t<\infty)$ ヲ考ヘル。

假定 b）φ_t ハ Bochner--Neumann ノ意味デ任意ノ有限区間デ可積分。A_ν ハ高々 zero measure ノ t-set ヲノゾイテ，$\Gamma_{\nu,t}\ \varphi_t$ ニ対シテ define サレテ居リ次ノ関係ガ成立スル：

$$(8)\quad \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu(\Gamma_{\nu,t}\ \varphi_t)=0$$

---

(8) 関係式(8)ガ［C］ト違ッタ形デアルコトヤ，假定 c_1）及ビ e ガ［C］ニハナカッタ事ナドニ注意セラレタイ。

假定c₁) φ_t ハ h_y ノ strong topology ノ意味デ一様ニ連続デアル。

假定c₂) φ_t, $-\infty < t < \infty$ ナル set 全ハ h_y ノ strong topology ノ意味デ Compact デアル。

假定d) ψ が若シ

$$(9)\quad A_0\psi = A_1\psi = \cdots\cdots = A_n\psi = 0$$

ヲミタスナラバ $\psi = 0$

假定e) $I_{\nu,t}$ ノ Weighting functions ヲ夫々 $g_\nu(t)$ トスル。コレハ或ル有限區間 $[\alpha,\beta]$ ニ distribute サレテヰルトスル。

$$(10)\quad G_\nu(\lambda) = \int_\alpha^\beta e^{\lambda t}\,dg_\nu(t) \qquad (\nu = 0,1,2,\cdots\cdots,n)$$

トオクトキ

$$(11)\quad G_\nu(\lambda) \sim \sum_{s=1}^{m} A_{\nu,s}\,e^{h_{\nu,s}\lambda} \qquad (as\ |\lambda| \to \infty)$$

ナル近似展開ヲモツ。コヽニ、$A_{\nu,s}$ ハ複素数デアリ，$h_{\nu,s}$ ハ実数デ

$$(12)\quad h_{\nu,1} < h_{\nu,2} < \cdots\cdots < h_{\nu,m_\nu}{}^{(9)} \qquad (\nu = 0,1,2,\cdots\cdots,n)$$

ナル関係ガアルトスル。

定理: 假定 a) ― e) が成立シ，A_ν，並ビニ A_ν^* ガスベテ相互ニ可換デアルトスル。然ルトキニハ，次ノコトガ成立スル。

---

(9) $m_\nu = 1$ デアルカモ知レヌ。

若シ、有限個又ハ可附番無限個ノ相互ニ Orthogonal ナ closed linear manifolds $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \cdots\cdots$ ガアッテ $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \cdots\cdots = \mathfrak{H}$ デアリ且ツ

A. スベテノ A_ν ハスベテノ $\mathfrak{M}_N$ ニヨッテ reduce サレル。

B. スベテノ A_ν ハスベテノ $\mathfrak{M}_N$ デ bounded デアル。

C. Zero measure ノ t-set ヲノゾイテ, φ_t ハ高々

$$(B) \quad \varphi_t = \sum_N \varphi_{N,t} \qquad (\varphi_{N,t} \in \mathfrak{M}_N)$$

ナル展開ヲモツ。コレハ, 無限項ヨリナルトスルモ, スベテノ t ニツイテ conv. スル。

D. 各 φ_t^N ハ abstract Cauchy's series ニヨッテ

$$\varphi_t^N \sim \sum_{q=1} e^{i\beta_{N,q}t} \psi_{N,q}$$

ナル展開ガナリタツ。($\psi_{N,q} \in \mathfrak{M}_N$ ニシテ t ニモハヤ無関係, $\beta_{N,q}$ ハ実数デアル。) 而シテ各 φ_t^N ハ abstract almost periodic デアル。(10)

E. $\beta_{N,q}$ ニ関シテハ

---

(10) abstract Cauchy's series, abstract almost periodicity ノ意味ハ Part II デ述ベル。

$$(15)\quad \sum_{\nu=0}^{n} G_\nu(i\beta_{N,q}) A_\nu \Psi_{N,q} = 0,$$

$$N = 1, 2, \cdots\cdots;\ q = 1, 2, \cdots\cdots$$

ガ成立スル。

コレハ，［C］ニ於ケル Theorem I ニ相當スルト見ラレヨウ。尚次ノコトヲ remark シテオキタイ。特ニ kernels $g_\nu(s)$ ガ有限個ノ不連續點カラナル Step-function デアルトキニハ，假定 e) ノ成立スルコトハイフマデモナイ。

依ッテ、吾々ノ上ニ掲ゲタ定理ハ difference eq. ノ almost periodic solution ニ關スル Bochner ノ定理ノ擴張トモ見ナサレル。Bochner ノ定理ニヨレバ

$$\sum_{\alpha=0}^{\rho} a_\alpha y(x+\delta_\alpha) = 0$$

ノ解ニシテ、bounded デアリ且ツ uniformly continuous ナモノハ，必ズ almost periodic デアル。

尚，Bochner ノ定理ハ[11] differente-diff. eq.

(11) S. Bochner: Über gewisse Differential-und allgemeinere gleichungen deren Lösungen fast periodisch sind. I. Teil. Der Existenz satz., Math. An. 102 (1929) II Teil, Math. Ann. 103 (1930). コレラノ論文ヲ，夫々［B_1］，［B_2］ヲ以テ引用スル。

ニ関スルモノデアッテ、今ノベタノハ，ソノ special case ニツイテデアル。コノ一般定理ニ對應スルモノヲ求メルノハ，筆者ニハ不成功デアッタコトヲ附記シナケレバナラナイ。[12]

4. 定理ノ証明ノ details ニ入ルニ先ッテ、ソノ outline ヲ述ベテ置カウ。先ヅ、吾々ハ h_y ノ specializations ニ関スル [C] ノ方法[13] ヲ或程度マデ適用シウルコトハ明カデアル。依ッテ次ノ如キ高度ニ特殊化サレタ二ツノ場合ヲ論ズレバヨイコトハ明カデアロウ。

---

(12) [C] p. 272 ノ補助定理4ノ証明が一般的ニ linear translatable diff. eq ニ適用サレナイコトヲ讀者ハ容易ニ御了解ニナラレルコトト思フ。ヨッテ

$$\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu\left(\frac{\partial^{n-\nu}}{\partial t^{n-\nu}} \Gamma_{\nu,t}\,\varphi_t\right)=0$$

或ハ

$$\sum_{\nu=0}^{n} A_\nu(I^\nu \Gamma_{\nu,t}\,\varphi_t)=\sum_{\mu=0}^{n-1}\omega_\mu t^\mu \quad \left(\begin{array}{l}I^\nu \text{ハ } \nu\text{-iterated}\\ \text{ナ積分}\end{array}\right)$$

ヲ論ズルコトニハ，Γ_ν ニ関シテ、假定が多クナルデアロウ。コヽニ問題ハ殘ッテヰル。

(13) Part II, Proof of Theorem I [C] pp. 272—275 ヲ見テレヨ。

[C] Specializations 4 (p. 275) ヘ導ク考察ハ，吾々ノ場合ニモ直チニ移シウル。何者，ソレハ $A_0, A_1, \cdots\cdots, A_n$ ノミニ関シテノ議論デアリ、$A_0, A_1, \cdots\cdots, A_n$ ニ関シテハ，[C] ト同ジ假定デコノ談話ハ出發シタノデアルカラデアル。

Case I. $\mathfrak{h}_y$ ガ一次元ナルトキ。

Case II. $\mathfrak{h}_y$ ガ L_2M トシテ realized サレテ居リ

(16) $$A_\nu f(x) = F_\nu(x) f(x) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

トナリ、茲ニ $F_\nu(x)$ ガ皆有界ナ complex-valued ナ Baire ノ函数デアリ、方程式 (4) ハ

(17) $$\sum_{\nu=0}^{n} F_\nu(x) \int_\alpha^\beta \varphi(t+s, x)\, dg_\nu(s) = 0$$

ガ measure zero ノ t-set T ヲノゾイテ、スベテノ (t, x) ニ関シテ成立シ, T ニナイ各 t ニ関シテ measure 0 ノ x-set ヲノゾイテ成立スルトイフ場合

サテ、Case I ニ関シテハ, Bochner ノ定理ヲ援用、ソノ方法ヲ倣ヘバヨイ。

Case II ニ関シテハ, (17) ニ関シテ更ニ reduction ヲ施スノデアル。ソシテ更ニ specializations ヲ施スコトニヨツテ $\varphi(t, x)$ ニ對シテハ product space (t, x) ニ於ケル, ソレノ Cauchy 級数ヲ定義出来ル。コレニヨツテ始メテ（筆者ノ考ヘデハ）Bochner–Neumann ト同様ナ議論ヲ続ケ得ル端緒ニ就ケルノデアル。読者モ直チニ、御了解下サレルコトト思フガ、(17) ナル方程式ヲトクニアタツテノ主ナル困難ノ一ツハ, M ノ各 fixed x（但シ, 場合ニヨツテ measure zero ノ x-set ヲノゾク）ニ對スル λ ニ関スル方程式

---

(14) footnote (12) 所掲

$$(18)\quad \sum_{\nu=0}^{n} F_\nu(x)G_\nu(\lambda)=0$$

ガ一般ニ無限デアルトイフ点ニ存スル。コノコトガ［C］pp. 277—280 ニ於ケル Bochner-Neumann ノ議論ヲソノマヽ襲踏スルコトヲ拒ムヤウニ思ハレル。コレヲ避ケテ進行スルタメ、Cauchy 級数論ノ諸結果ト、Wiener ノ方法[15]トヲ併用シテ見ヨウト思フ。ソノ結果 Hilbert space ノ要素 a_n ヲ係数トシタ級数

$$\sum a_n e^{i\beta_n t}$$

（β_n ハ t ニ無関係ナ実数）ヲ考ヘルコトニナル。コレマデノコトヲ Part I ニ於テ示サウ。

Part II ニ於テハ，カヽル級数ヲ一般的ニ（定理ノ証明ノ必要以上ニ一般ニシテ）考察シテオクコトニスル。即チ

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{m_n-1} a_{n,s}\, t^s e^{\lambda_n t}$$

ナル形（コヽニ、$a_{n,s}$ ハ normalized Banach space ノ元，λ_n ハ複素数）ノ所謂 abstract Cauchy series ナルモノヲ導入シテ基本性質ヲ述ベテミタイ。ソノ結果ヲ利用スルコトニヨツテ Part III ニ於テ定理ノ証明ヲ完了スルノデアル。

---

(15) N. Wiener: The operational calculus. Math. Ann. 95 (1926)