607. Lie ノ第二基本定理ニ就テ

吉田　耕作（阪大）

R ヲ距離付ケラレタ環，$\mathfrak{T}$ ヲ $X_1,\cdots\cdots,X_n$ ヲ其ノ基トスル Lie-ring $\subseteq R$ トスル。コノトキ $X, Y \in \mathfrak{T}$ トシテ

$$(\exp X)(\exp Y) = \exp Z(x, y)$$

ナル如キ $Z(X, Y) \in \mathfrak{T}$ ノ存在スルコトヲ示シ且ツ其ノ形ヲモ與ヘタイ。

証明ノ essential ナ idee ハ Leipziger Berichte (1906) ニ於ケル F. Hausdorff ニヨルガ，H. ノ如ク formal デナク且ツ幾分ワカリ易イダラウト思ヒマス。

H. p.26 デハ $x=(wx)$ ナル如キ new symbol w ヲ導入シナケレバナラナカッタリシテ一寸氣持ガ悪イケレドモ之レ等モ避ケラレマス。differential operator ニ關スル Lie-ring ノ場合モ以下ヲ多少 modify スレバ得ラレル。尚本紙談話 337 ニ於ケル証明ハ誤ッテヲリマシタ（Vertauschbar デナイモノヲ Vertauschbar ナルカノ如ク取扱ッタノデ）

I. 以下ニ出テ來ル無限級数ガ X, Y 等ノ 0 ニ近イトキ絶對一様收斂ナコトハ容易ニ分リマス。

先ヅ $X, Y, U, V \in R$ トシ λ ガ小サイ實数ノトキ

$$
(1)\quad \begin{cases} \exp(X+\alpha\bar{U}) = (\exp X)\{E+\alpha\varphi(\bar{U},X)+O(\alpha^2)\} \\ \exp(Y-\alpha\bar{V}) = \{E-\alpha\psi(\bar{V},Y)+O(\alpha^2)\}(\exp Y) \end{cases}
$$

コヽニ

$$
(2)\quad \begin{cases} \varphi(\bar{U},X) = \bar{U} + \dfrac{[\bar{U},X]}{\underline{|2}} + \dfrac{[[\bar{U},X],X]}{\underline{|3}} + \cdots\cdots \\ \psi(\bar{V},X) = \varphi(\bar{V},-X), \quad [A,B] = AB-BA \end{cases}
$$

証明：　一般ニ巾級数 $f(x)$ ガ與ヘラレタ時 $f(X+\bar{U})$ ニ於テ其ノ factor トシテ $\bar{U}$ ヲ唯一ツ含ム項全体ノ和ヲ $\overline{f(X+\bar{U})}$ トカケバ

$$
(3)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{(X+\bar{U})^n}}{\underline{|n}} = (\exp X)\,\varphi(\bar{U},X)
$$

ヲ示セバヨイ。所ガ

$$
(4)\quad \frac{\overline{(X+\bar{U})^n}}{\underline{|n}} = \frac{\overline{(X+\bar{U})^{n-1}}}{\underline{|n-1}}\,\frac{X}{n} + \frac{X^{n-1}\bar{U}}{\underline{|n}}
$$

今簡単ノタメニ $[\bar{U},X]=(\bar{U}X)$, $[[\bar{U},X],X]=(\bar{U}X^2)$, -------ト略記スレバ (3) ヲ云フニハ，(2) ヲ用ヒテ

$$
\frac{\overline{(X+\bar{U})^n}}{\underline{|n}} = \frac{(\bar{U}X^{n-1})}{\underline{|0}\,\underline{|n}} + \frac{X(\bar{U}X^{n-2})}{\underline{|1}\,\underline{|n-1}} + \cdots\cdots + \frac{X^{n-2}(\bar{U}X)}{\underline{|n-2}\,\underline{|2}} + \frac{X^{n-1}\bar{U}}{\underline{|n-1}\,\underline{|1}}
$$

ガ云ヘレバヨイ。之ハ (4) ニヨリ歸納法デスグワカル。

II. X, Y ガ充分 0 ニ近ケレバ

$$
\begin{cases} (\exp X)(\exp Y) = \exp(Z(X,Y)) \\ Z(0,Y)=Y, \quad Z(X,0)=X \end{cases}
$$

ナル如キ $Z(X,Y)\in R$ ガ *unique* ニ定マル。即チ

$$(5)\quad l_n(\exp X\cdot\exp Y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\exp X\cdot\exp Y-E)^n$$

備テ今 $U=X$ 即チ $\varphi(U,X)=X$ トヲキ $\nabla(X.Y)$ ヲ $\psi(\nabla,Y)=X$ ニヨッテ定メル。直グワカル如ク（級数 $\frac{y}{e^y-1}$ ト比較セヨ）

$$(6)\quad\begin{cases}\nabla(X,Y)=X-\frac{1}{2}(XY)+\frac{B_2}{\lfloor 2}(XY^2)-\frac{B_2}{\lfloor 4}(XY^4)+\cdots\cdots\\ B_i \text{ ハ Bernouilli number}\end{cases}$$

然ラバ (1) ニヨリ

$$\exp Z(X+\alpha X,Y-\alpha\nabla(X,Y))=(\exp X)(E+\alpha X+o(\alpha))$$
$$(E-\alpha X+o(\alpha))(\exp Y)$$

ヨッテ $\frac{\partial}{\partial\alpha}\exp(Z(X+\alpha X,Y-\alpha\nabla(X,Y)))=0$ for $\alpha=0$. 故ニ級数 l_n ヲ用ヒテ項別微分スレバ結局

$$(7)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial Z(X+\alpha X,Y-\alpha\nabla(X,Y))}{\partial\alpha}=0\quad\text{for}\quad\alpha=0\\ Z(0,Y)=0\end{cases}$$

III. (7) ヲ解クコト。

$X=\sum_{i=1}^{n}t_iX_i$, $Y=\sum_{i=1}^{n}s_iY_i$ ト置ケバ (6) ニヨリ $\nabla(X,Y)=\sum_{i=1}^{n}v_i(t,s)X_i$,

ココニ $v_i(t,s)=t_i+u_i(t,s)$ ノ形デ u_i ハ t ニ

ツキ linear homogeneous。

given $Z(X+\alpha X, Y-\alpha \nabla(X,Y))$

$$=Z\left((1+\alpha)\sum_{i=1}^{n} t_i X_i, \sum_{i=1}^{n}(s_i-\alpha v_i(t,s))X_i\right)$$

ダカラ (7) ニヨリ, $Z(X,Y)=Z(t,s)$ トオイテ

$$(8)\quad \sum_{i=1}^{n} t_i \frac{\partial Z(t,s)}{\partial t_i}=\sum_{i=1}^{n} v_i(t,s)\frac{\partial Z(t,s)}{\partial s_i}$$

$Z(t,s)$ ヲ t ニツキ k 次同次ナ term $Z_k(t,s)$ ノ和トスル。

$$Z=Z_0+Z_1+Z_2+\cdots\cdots$$

然ラバ (7) ニヨリ $Z_0=\sum_{i=1}^{n} s_i X_i$ 又 (8) ニヨリ v ガ t ノ一次同次式ナコトニ注意スレバ

$$kZ_k=\sum_{i=1}^{n} v_i(t,s)\frac{\partial Z_{k-1}}{\partial s_i}$$

ヨッテ微分演算子 $A(t,s)=\sum_{i=1}^{n} v_i(t,s)\frac{\partial}{\partial s_i}$ ヲ導入スレバ

$$Z(X,Y)=Z(t,s)=(\exp A(t,s))\sum_{i=1}^{n} s_i X_i$$

ヲ得ル。ヨッテ $Z(X,Y)\in \mathfrak{T}$ 且ツ同時ニ Z ノ形ガ求マッタ。