600. locally bicompact ナ topological group ノ連續表現

吉田　耕作（阪大）

前ニ談話 383, 388, 446, 456 ニ於テ次ノ結果ヲ得マシタ。

定理：　距離付ケラレタ環 R ニ横ハル群 $\mathfrak{D}$ デ locally bicompact 且ツ connected ナ topological group $\mathfrak{G}$ ヲ連続表現スレバ $\mathfrak{D}$ ハ Lie 表現デアル。

$\mathfrak{D}$ ガ Lie 表現ト云フノハ（談話 383 参照），$\mathfrak{R}$ = real number ヲ係数トシテ一次独立ナ $U_1, U_2, \cdots\cdots, U_k$

ガアッテ之ノ *real number* ニヨル一次結合ノ全体ヲ $\mathfrak{T}$ トスレバ

1) $a \in \mathfrak{G}$ ガ充分 $\mathfrak{G}$ ノ単位 e ニ近ケレバ $D(a) \in \mathfrak{D}$ ハ $\exp. \mathfrak{U}$ ト表ハサレル。

コヽニ $\mathfrak{U} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathfrak{U}_i \in \mathfrak{T}$ ニシテ且ツ $a \to e$ ノトキ

$$\sum_{i=1}^{k} |\alpha_i| \to 0$$

2) 任意ノ $\mathfrak{U} \in \mathfrak{T}$ ニ對シテ $\exp. \mathfrak{U} \in \mathfrak{D}$.

3) $\mathfrak{D}$ ノ任意ノ要素ハ $\exp. \mathfrak{U}$, $\mathfrak{U} \in \mathfrak{T}$ ノ如キ $\mathfrak{D}$ ノ要素有限コノ積トシテ表ハサレル。ココニ $\mathfrak{U}$ ハ如何程デモ O ニ近クトレル。

即チ $\mathfrak{T}$ ハ *real linear space* デアッタガ，之ガ *Lie-ring* ナルコト；$\mathfrak{U}, \mathfrak{V} \in \mathfrak{T}$ ト共ニ $(\mathfrak{U}\mathfrak{V} - \mathfrak{V}\mathfrak{U}) \in \mathfrak{T}$; ハ未ダ証明シナカッタ。

所ガ $\mathfrak{T}$ ガ *Lie-ring* ナルコトモ次ノ如ク容易ニ証明デキマス。

先ニ（談話 280, 291, 298）ニ於テ，R ニ横ハル群 $\mathfrak{D}$ ガ *Lie* 群ニナルタメノ必充條件ハ $\mathfrak{D}$ ガ *locally compact* 且ツ *connected* ナコトデアルコトヲ示シマシタガ，之レモ上ノ結果カラ *corollary* トシテ得ラレマス。即チ $\mathfrak{D}$ ヲ $\mathfrak{D}$ 自身ノ連続表現ト考ヘレバヨロシイ。（距離空間デハ *compact* ト *bicompact* トハ一致スル）

尚上述ノ定理ハ談話 383—456 ニ於イテハ *locally*

compactトナツテヲリマスガ之レヲlocally bicompactト改メマシタ。ソレハ $\mathfrak{G}$ ト共ニ $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ガ l.c. ニナルトイフコトヲ使ツテヲリマス（談話383）ガ之ガ云ヘル爲ニ l.b. ト改メタ次第デス。

補証明. 談話383ニ示シタ如ク $\mathfrak{D}$ ガ $\mathfrak{G}$ ニ連続同型ナ場合ダケヤレバ充分デスカラ $a \longrightarrow D(a)$ ヲ同型對應ト假定シマス。

<u>$\mathfrak{U}, \mathfrak{V} \in \mathfrak{T}$ トシ $\mathfrak{U}\mathfrak{V}-\mathfrak{V}\mathfrak{U} \neq 0$ ノトキニ $\mathfrak{U}\mathfrak{V}-\mathfrak{V}\mathfrak{U} \in \mathfrak{T}$ ヲ示ス。</u>

$\mathfrak{T}$ ノ element ノ定義ニヨリ，$\mathfrak{G}$ 内ノ one-parameter continuous subgroup $a(t), b(t)$ ガアリ

$$D(a(t)) = \exp.\, t\mathfrak{U}, \quad D(b(t)) = \exp.\, t\mathfrak{V}.$$

ココニ $a(t)a(s) = a(t+s),\ a(0) = e,$

$$\lim_{t \to t_0} a(t) = a(t_0)$$

（b ニツイテモ同様）デアルガ parameter t ヲ適當ニトツテヲイテ

$$\begin{cases} a(t) \in \mathfrak{V},\ b(t) \in \mathfrak{V}, & -1 \leqq t \leqq 1 \\ \mathfrak{V} \text{ ハ } \mathfrak{V} = \mathfrak{V}^{-1} \text{ ナル如キ } e \text{ ノ近傍} \end{cases}$$

ト假定シテイテ差支ヘナイ。（$a(t)$ ノ代リニ $a(\alpha t)$ ヲトリ α ヲ充分大キクトレバヨイ）。

コヽニ於イテ

$$c_n = a\left(\frac{1}{n}\right) b\left(\frac{1}{n}\right) a\left(\frac{-1}{n}\right) b\left(\frac{-1}{n}\right)$$

ト置クト n ガ充分大キイ所デハ $c_n \neq e$.

何者，若シ然ラズトスレバ

$$a\left(\frac{1}{n}\right)b\left(\frac{1}{n}\right)=b\left(\frac{1}{n}\right)a\left(\frac{1}{n}\right)$$

即チ
$$\exp\frac{U}{n}\exp\frac{V}{n}=\exp\frac{V}{n}\exp\frac{U}{n}$$

ナル如キ n ガ無限ニ多クナケレバナラナイ。所ガ

$$\exp\frac{U}{n}\exp\frac{V}{n}=E+\frac{1}{n}(U+V)$$
$$+\frac{1}{n^2}(U^2+2UV+V^2)+O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

（E ハ $\mathfrak{O}$ ノ単位）ナルコトガ直グワカルカラ $UV=VU$ ヲ得テ不合理デアル。

故ニ始メカラ $c_n\neq e$；$n=1,2,\cdots\cdots$ トシテヲク。$\mathfrak{O}$ ハ l. b. ダカラ V ヲ充分小サクトッテ V ノ閉被 $\overline{V}$ ガ bicompact 且ツ

$$|D(a)-E|<1\qquad\text{for}\quad a\in\overline{V}$$

トシテ置ク。

$\mathfrak{G}$ ハ arbitrarily small cyclic subgroup ヲ含マナイ（談話383）カラ各 c_n ニ對シテ

$$\begin{cases} c_n^m\in\overline{V} & \text{for}\quad m=0,\pm1,\cdots\cdots,\pm l_n \\ c_n^{\pm(l_n+1)}\overline{\in}\,\overline{V}(e) & \end{cases}$$

ナル如キ正整数 l_n ガ撰ベル。$\min.(l_n,n^2)=m_n$ ト置ク。$\frac{m_n}{n^2}$ ハ 1 ヨリ大キクナイ正数デアリ，且ツ $\overline{V}$ ハ bicompact デ第一可附番公理ガ $\mathfrak{G}$ デ満足サレルカラ（談話456）

$$\lim_{n'\to\infty}\frac{m_{n'}}{(n')^2}=t_0,\qquad 0\leq t_0\leqq 1$$

$$\lim_{n'\to\infty} C_{n'}^{m_{n'}}=C\in\overline{\nabla}$$

ナル如キ整数列 $\{n'\}$ が存在スル。

故ニ $\displaystyle \lim_{n'\to\infty} D(C_{n'})^{m_{n'}}=\lim_{n'\to\infty} D(C_{n'}^{m_{n'}})=D(C).$

従ツテ談話383ト同様ニシテ

$$\lim_{n'\to\infty} m_{n'}\{D(C_{n'})-E\}=\lim_{n'\to\infty} m_{n'}\, \ln D(C_{n'})$$

$$=\lim_{n'\to\infty} \ln\{D(C_{n'})^{m_{n'}}\}$$

$$=\ln D(C)$$

ヲ得ル。所が

$$m_{n'}\{D(C_{n'})-E\}=m_{n'}\{D(a(\tfrac{1}{n'}))D(b(\tfrac{1}{n'}))$$

$$-D(b(\tfrac{1}{n'}))D(a(\tfrac{1}{n'}))\}D(a(\tfrac{-1}{n'}))D(b(\tfrac{-1}{n'}))$$

デアリ

$$\lim_{n'\to\infty} D(a(\tfrac{-1}{n'}))D(b(\tfrac{-1}{n'}))=E$$

デアルカラ

$$\ln D(C)=\lim_{n'\to\infty} m_{n'}\Big\{\Big[D(a(\tfrac{1}{n'}))-E\Big]\Big[D(b(\tfrac{1}{n'}))-E\Big]$$

$$-\Big[D(b(\tfrac{1}{n'}))-E\Big]\Big[D(a(\tfrac{1}{n'}))-E\Big]\Big\}$$

此ノ右辺第一項ハ

$$\frac{m_{n'}}{(n')^2} n'\left[D\left(a\left(\frac{1}{n'}\right)\right)-E\right] n'\left[D\left(b\left(\frac{1}{n'}\right)\right)-E\right]$$

トナルガ，

$$n'\left[D\left(a\left(\frac{1}{n'}\right)\right)-E\right] \to \ln D(a(1)) = \mathfrak{U},$$

$$n'\left[D\left(b\left(\frac{1}{n'}\right)\right)-E\right] = \mathfrak{V}$$

ニナル（談話383）カラ結局

$$\ln D(c) = t_0(\mathfrak{U}\mathfrak{V}-\mathfrak{V}\mathfrak{U})$$

ヲ得ル。

コヽニ $c \neq e$ 即チ $t_0 \neq 0$ デアル。何者，無限ニ多クノ n' ニ対シテ $m_{n'} = n'^2$ ナラ $t_0 = 1$ ダカラ文句ハナイ。若シアル n'_0 カラ先キノ n' ニ對シテ常ニ $m_{n'} < n'^2$ トスレバ之等ノ n' ニ對シテ $m_{n'} = l_{n'}$。故ニ

$$C_{n'}^{\pm(m_{n'}+1)} \in \overline{\mathfrak{V}} \qquad \text{for} \quad n' \geqq n'_0$$

然ラバ，$\mathfrak{V}_1$ ヲ以テ $\mathfrak{V}_1 = \mathfrak{V}_1^{-1}$ 且ツ $\overline{\mathfrak{V}_1}^2 \subseteqq \mathfrak{V}$ ナル如キ e ノ近傍トスルト $C_n^{m_{n'}} \in \overline{\mathfrak{V}_1}$.

ヨッテ　$c \neq e$　即チ　$t_0 \neq 0$.

$$\ln D(c) = t_0(\mathfrak{U}\mathfrak{V}-\mathfrak{V}\mathfrak{U})$$

即チ　　$D(c) = \exp(t_0(\mathfrak{U}\mathfrak{V}-\mathfrak{V}\mathfrak{U}))$　ト　$c_{n'} \to e$,
$C_{n'}^{m_{n'}} \to c \neq e$ トカラ $t_0(\mathfrak{U}\mathfrak{V}-\mathfrak{V}\mathfrak{U}) \in \mathfrak{J}$（談話383）。

然シテ $\mathfrak{J}$ ハ real linear space デ $t_0 \neq 0$ ダカラ　$\mathfrak{U}\mathfrak{V}-\mathfrak{V}\mathfrak{U} \in \mathfrak{J}$。　　　　—以上—

之デ略々 definitive ナ結果ニ到達シタヤウニ思ヒ

マス。