599. Topologische Transformation ニ関シテ不変ナ Metrik ニ就イテ

角谷 静夫 (阪大)

近藤基吉氏ハ東北數學雜誌37巻383頁ニ於テ一ツノ Hausdorff 空間Rト、RヲR全体ヘ topologische ニ変換スル変換 σ ノ群 $\mathfrak{G}$ ガ與ヘラレタトキ $\mathfrak{G}$ ニ属スル変換 σ ニ関シテ invariant (isometrisch) ナ Metrik ヲ R ニ導入スルコトヲ試ミラレ一ツノ必要且ツ十分ナ條件ヲ得ラレタ。近藤氏ノ條件ハ非常ニ一般デ群 $\mathfrak{G}$ ガ R ニ於テ transitiv デナイ場合ニモ成立スルモノデアリマスガ、始メカラ Rガ Hausdorff ノ zweites Abzählbarkeitsaxiom (2.A.) ヲ満足シテヰル場合シカ考ヘテヰナイノデソノ意味デ一般性ヲモツテヰナイ。

次ニハ $\mathfrak{G}$ ガ R ニ於テ transitive デアルトキニハ 2.A. ヲ假定セズニ一ツノ必要且ツ十分ナ條件ガ得ラレルコトヲ示サウ。

(erstes Abzählbarkeitsaxiom (1.A.) ガ必要ナコトハ明カデアル。又 $\mathfrak{G}$ ガ R ニ於イテ transitiv デナイトキニハ 1.A. ダケデ不十分ナコトハ $\mathfrak{G}$ ガ Einheitstransformation ノミヨリ成ル群デアル場合ヲ考ヘレバ明カデアル。コノトキハ單ニ R ノ Metrisation ガ問題トナル)

定理. Hausdorff 空間Rト、Rヲ全体ニ topolo-

gische ニ交換スル変換 σ ノ *transitiv* ナ群 $\mathfrak{G}$ ガ與ヘラレタトキ、R ニ任意ノ $\sigma \in \mathfrak{G}$ ニ對シテ $\rho(\sigma x, \sigma y) = \rho(x, y)$ ナル如キ *Metrik* ヲ導入出來ルタメニ必要且ツ十分ナ條件ハRガ 1. A. ヲ満足シ、且ツRニ一点 x_0 ガ存在シテ、任意ノ x_0 ノ近傍 $U(x_0)$ ニ對シテ x_0 ノ他ノ近傍 $V(x_0)$ ガ定マリ、任意ノ $\sigma \in \mathfrak{G}$ ニ對シテ

$V(x_0) \cdot \sigma V(x_0) \neq 0$ ナラバ $\sigma V(x_0) \subset U(x_0)$ トナルコトデアル。

注意: Rガ *topologische Gruppe* デ $\mathfrak{G}$ ガソノ *Gruppe* ノ *Element* ニヨル変換デアルトキニハRガ 1.A. ヲ満足シテヰルコトノミガ條件トナリ、他ノ條件ハ常ニ満足サレテヰル。

($x_0 = e$ ナルトキハ $U(e)$ ニ対シテ $(V(e))^{-1} = V(e)$, $(V(e))^3 \subset U(e)$ ナル $V(e)$ ヲトレバヨイ。$x_0 \neq e$ デナイトキハ x_0^{-1} ニヨリ *Einheit* ノ近傍ニウツシテ考ヘレバヨイ)

ヨッテ定理ハ前ニ得ラレタモノ(紙上談話會79号又ハ學士院記事 1936年,4月)ト一致スル。

証明: 必要ナコトハ明カデアルカラ十分ナコトヲ証明シヨウ。

Rガ 1. A. ヲ満足シテヰルカラ、x_0 ノ *definierendes Umgebungssystem* $\{O_n(x_0)\}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$ ガ存在スル。先ヅ $V_1(x_0) = O_0(x_0)$ トオキ、$U(x_0) = V_1(x_0)$ ニ對シテ定理ノ假定ヨリ定マル $V(x_0)$ ヲ

$\nabla_{\frac{1}{2}}(x_0)$ トオク。一般＝$\nabla_{\frac{1}{2^{n-1}}}(x_0)$ が定マッタトキ、$\mho(x_0)=\nabla_{\frac{1}{2^{n-1}}}(x_0)\cdot O_{n-1}(x_0)$＝對シテ定理ノ假定ヨリ定マル$\nabla(x_0)$ヲ $\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)$トオク。($n=2,3,4,\cdots\cdots$)。此ノ如ク $\left\{\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\right\}$ ($n=0,1,2,\cdots\cdots$) ヲ定義スレバ、コレハ次ノ性質ヲモツテキル。

$$\sigma\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\cdot\tau\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\neq 0$$

ナラバ

$$\sigma\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)+\tau\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\subset\sigma\nabla_{\frac{1}{2^{n-1}}}(x_0)\cdots\cdots\cdots(1)$$

何トナレバ $\sigma\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\cdot\tau\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\neq 0$ ヨリ

$$\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\cdot\sigma^{-1}\tau\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\neq 0$$

ヨツテ $\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)$ ノ作リ方ヨリ

$$\sigma^{-1}\tau\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\subset\nabla_{\frac{1}{2^{n-1}}}(x_0)\quad \text{又ハ}$$

$$\tau\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\subset\sigma\nabla_{\frac{1}{2^{n-1}}}(x_0)$$

ヲ得ル。

$$\sigma\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\subset\sigma\nabla_{\frac{1}{2^{n-1}}}(x_0)$$

ハ明カデアル。

今任意ノ R ノ集合 M＝對シテ $\mho(M,\frac{1}{2^n})$ ヲモッテ $M\cdot\sigma\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\neq 0$ ナルアラユル $\sigma\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)$ ($\sigma\in\mathfrak{G}$, 但シnハ一定) ノ和ヲ表ハセバ $\mho(M,\frac{1}{2^n})$ ハ M ヲソノ内部＝含ム開集合デアル。且ツ

$$\mho\left(\mho\left(M,\frac{1}{2^n}\right),\frac{1}{2^n}\right)\subset\mho\left(M,\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

ガ成立スル。何トナレバ x ヲ $U\left(U(M,\frac{1}{2^n}),\frac{1}{2^n}\right)$ ノ任意ノ点トスレバ $\sigma\in\mathfrak{G}$ ガ存在シテ $x\in\sigma\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)$,

$U(M\cdot\frac{1}{2^n})\cdot\sigma\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\neq 0$

後者ヨリ $\tau\in\mathfrak{G}$ ガ存在シテ

$$M\cdot\tau\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\neq 0,\quad \tau\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\cdot\sigma\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\neq 0$$

更ニコノ後者ト (1) トヨリ

$$\tau\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)+\sigma\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\subset\tau\nabla_{\frac{1}{2^{n-1}}}(x_0)$$

即チ　$x\in\tau\nabla_{\frac{1}{2^{n-1}}}(x_0)$ ニテ且ツ $M\cdot\tau\nabla_{\frac{1}{2^{n-1}}}(x_0)\neq 0$

ヨッテ　$x\in U(M,\frac{1}{2^{n-1}})$.　x ハ $U\left(U(M,\frac{1}{2^n}),\frac{1}{2^n}\right)$ ノ任意ノ点デアッタカラ

$$U\left(U(M,\frac{1}{2^n}),\frac{1}{2^n}\right)\subset U\left(M,\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

ヲ得ル。

今 $\left\{\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\right\}$ ヨリ $\nabla_{\frac{2k+1}{2^n}}(x_0)$ ヲ

$$\nabla_{\frac{2k+1}{2^n}}(x_0)=U\left(\nabla_{\frac{k}{2^{n-1}}}(x_0),\frac{1}{2^n}\right)$$

ニヨッテ定義スレバ（n ニ對スル帰納法ニヨリ定義スル。$k=1,2,\cdots\cdots,2^{n-1}-1$; $n=2,3,\cdots\cdots$）此ノ如ク定義サレタ $\nabla_r(x_0)$　（r: *diadisch*, $0<r\leqq 1$）ハ $r<r'$ ナルトキ $\nabla_r(x_0)\subset\nabla_{r'}(x_0)$ デ且ツ

$$U(\nabla_{\frac{k}{2^n}}(x_0),\frac{1}{2^n})\subset\nabla_{\frac{k+1}{2^n}}(x_0)$$

ヲ満足スル。

$(k=1, 2, \cdots\cdots, 2^n-1;\ n=1, 2, \cdots\cdots)$ コレハ k ガ *gerade* ナルトキハ $\nabla_{\frac{k+1}{2^n}}(x_0)$ ノ定義ヨリ直チニ分リ k ガ *ungerade* ナルトキハ n ニ對スル帰納法ト

$$\mathfrak{U}\left(\mathfrak{U}\left(M, \frac{1}{2^n}\right), \frac{1}{2^n}\right) \subset \mathfrak{U}\left(M, \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

ナルコトトヨリ容易ニワカル。

コノ $\nabla_r(x_0)$ (r: *diadisch*; $0 < r \leqq 1$) ヨリ $f(x)$ ヲ

$$f(x) = \underset{r:\,diadisch\,.\,0<r\leqq 1}{\text{obere Grenze}} \quad \left[x \,\bar{\in}\, \nabla_r(x_0)\right]$$

ニヨリ定義スル。 特ニ $x \,\bar{\in}\, \nabla_1(x_0)$ ナラバ $f(x)=1$ デアル。

更ニコノ $f(x)$ ヨリ

$$\rho(x, y) = \underset{\sigma \in \mathfrak{G}}{\text{obere Grenze}} \left| f(\sigma x) - f(\sigma y) \right|$$

ニヨツテ $\rho(x, y)$ ヲ定義スレバ，コレガ求ムル *Metrik* デアル。

証明ハ前ノ *topologische Gruppe* ノ場合ト同様デアルカラ省略スル。

最近 *Bull, Amer. Math. Soc.* Voll XLIII. no. 2 (1937) ニ於テ A.H. Frink ガ *Distance function and the Metrization problem* ト云フ表題デ Chittenden ノ結果ヲ簡單ニ証明シテ居リマス。Frink ノ得タ結果ヲ用ヒルト最後ノ部分ハ少シ簡單ニナル。

Frink ノ得タ結果ハ次ノ通リデアル。

定理: 空間 R ノ任意ノ二点 x, y ニ對シテ real, non-negative ナ distance function $f(x,y)$ ガ定義サレ、コレガ次ノ條件

1° $f(x,x)=0$ $x \neq y$ ナラバ $f(x,y)>0$

2° $f(x,y)=f(y,x)$

3° $\varepsilon>0$ ニ對シテ $f(x,y)<\varepsilon$, $f(y,z)<\varepsilon$ ナラバ $f(x,z)<2\varepsilon$

4° $x_n \to x$ ト $f(x_n,x)\to 0$ トハ同等。

ヲ満足シテ居レバ

$$\rho(x,y)=\underset{x_1,x_2,\cdots\cdots,x_{n-1}\in R}{\text{untere Grenze}}\{f(x,x_1)+f(x_1,x_2)+\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots+f(x_{n-1},y)\}\text{ ---------------- }(2)$$

ニヨツテ定義サレタ $\rho(x,y)$ ハ R ノ Metrik トナリ且ツ $\rho(x_n,x)\to 0$ ト $f(x_n,x)\to 0$ シタガツテ $x_n \to x$ ト同等デアル。

但シ (1) ニ於ケル $\underset{x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n\in R}{\text{untere Grenze}}$ ハ任意ノ有限個ノ R ノ点 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n-1}$ (n モウゴク) ニ對スル untere Grenze ヲ表ハス。

Frink ノ結果ヲ用ヒルタメニハ $\{\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)\}$ ($n=0, 1, 2, \cdots\cdots$) ガ定義サレタトキ、$f(x,y)$ ヲ少クトモ一ツノ $\alpha\in\mathfrak{g}$ ニ對シテ $x, y\in\alpha\nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)$ トナル如キ最小ノ $\frac{1}{2^n}$ ニ等シイト定義スレバヨイ。

$f(x,y)$ ガ $f(\sigma x, \sigma y) = f(x,y)$ ヲ満足シテヰルコトハ明カデアルカラ、$f(x,y)$ ガ $1°, 2°, 3°$ 及ビ $4°$ ヲ満足シテヰルコトガ証明サレレバ (2) ニヨツテ定義サレタ $\rho(x,y)$ ハ $\rho(\sigma x, \sigma y) = \rho(x,y)$ ヲ満足スル R ノ Metrik トナツテ $\rho(x_n, x) \to 0$ ト $x_n \to x$ トハ同等ニナル。

$1°$ $f(x,x) = 0$ ナルコトハ $\mathfrak{G}$ ガ transitiv ナルコトヨリ明カデアル。即チ $\sigma x_0 = x$ ナル $\sigma \in \mathfrak{G}$ ニ對シテ任意ノ n ニ對シテ $x \in \sigma \nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)$ デアル。

次ニ $x \neq y$ ナルトキ $f(x,y) > 0$ ナルコトヲ示スニハ $\sigma x = x_0$, $\sigma y \neq x_0$ ナル $\sigma \in \mathfrak{G}$ ガ存在スルカラ $y \neq x_0$ ナルトキ $f(x_0, y) > 0$ ナルコトヲ示セバヨイ。先ヅ $y \neq x_0$ ヨリ n_0 ガ定マツテ $y \in O_{n_0-2}(x_0)$ トナル。ヨツテ勿論 $y \in \nabla_{\frac{1}{2^{n_0-1}}}(x_0)$ デアル。然ルニ今モシ $f(x_0, y) = 0$ デアルトスレバ 任意ニ大キイ n ニ對シテ σ ガ定マツテ
$x_0, y \in \sigma \nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)$ トナルカラ $n = n_0$ ニ對シテモ σ ガ定マツテ $x_0, y \in \sigma \nabla_{\frac{1}{2^{n_0}}}(x_0)$ トナル。 $x_0 \in \nabla_{\frac{1}{2^{n_0}}}(x_0)$ ヨリ $\nabla_{\frac{1}{2^{n_0}}}(x_0) \cdot \sigma \nabla_{\frac{1}{2^{n_0}}}(x_0) \neq 0$ デアルカラ $\nabla_{\frac{1}{2^{n_0}}}(x_0)$ ノ作リカタヨリ $\sigma \nabla_{\frac{1}{2^{n_0}}}(x_0) \subset \nabla_{\frac{1}{2^{n_0-1}}}(x_0)$

コレハ $y \in \nabla_{\frac{1}{2^{n_0-1}}}(x_0)$ ニ矛盾スル。

$2°$ 明カ。

$3°$ $\frac{1}{2^n} < \varepsilon \leqq \frac{1}{2^{n-1}}$ トセヨ。 $f(x,y) < \varepsilon$, $f(y,z) < \varepsilon$ ヨ

リ

$$f(x,y) \leqq \frac{1}{2^n}, \quad f(y,z) \leqq \frac{1}{2^n}$$

ヨッテ $\sigma, \tau \in \mathfrak{G}$ ガ定マリ

$$x, y \in \sigma \nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0), \quad y, z \in \tau \nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0)$$

y ハ両方ニ共通デアルカラ

$$\sigma \nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0) \cdot \tau \nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0) \neq 0$$

ヨッテ (1) ヨリ

$$\sigma \nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0) + \tau \nabla_{\frac{1}{2^n}}(x_0) \subset \sigma \nabla_{\frac{1}{2^{n-1}}}(x_0)$$

コレヨリ

$$x, z \in \sigma \nabla_{\frac{1}{2^{n-1}}}(x_0) \quad 即チ \quad f(x,z) \leqq \frac{1}{2^{n-1}} < 2\varepsilon$$

4° $x_n \to x$ トセヨ。$\sigma x = x_0$ ナル $\sigma \in \mathfrak{G}$ ガ存在スル。$\sigma x_n \to x_0$ デアル。ヨッテ任意ノ m ニ對シテ n_0 ガ定マリ $n > n_0$ ナルトキ $\sigma x_n \in \nabla_{\frac{1}{2^m}}(x_0)$ 即チ

$$f(x_n, x) = f(\sigma x_n, x_0) \leqq \frac{1}{2^m}$$

m ハ任意デアツタカラ $f(x_n, x) \to 0$.

m ハ任意デアリ、且ツ $\{O_m(x_0)\}$ ハ x_0 ノ *definierendes Umgebungssystem* 逆ニ $f(x_n, x) \to 0$ トセヨ。$\sigma x = x_0$ ナル $\sigma \in \mathfrak{G}$ ニ對シテ $f(\sigma x_n, x_0) \to 0$ デアル。ヨッテ任意ノ m ニ對シテ n_0 ガ定マリ、$n > n_0$ ナルトキ $f(\sigma x_n, x_0) \leqq \frac{1}{2^{m+2}}$ 又ハ少クトモ一ツノ τ ニ對シテ

$$\sigma x_n, x_0 \in \tau \nabla_{\frac{1}{2^{m+2}}}(x_0).$$

コレト $x_0 \in \nabla_{\frac{1}{2^{m+2}}}(x_0)$ トヨリ

$$\nabla_{\frac{1}{2^{m+2}}}(x_0) \cdot \tau \nabla_{\frac{1}{2^{n+2}}}(x_0) \neq 0$$

ヨツテ　$\tau \nabla_{\frac{1}{2^{m+2}}}(x_0) \subset \nabla_{\frac{1}{2^{m+1}}}(x_0)$

故ニ　$\sigma x_n \in \nabla_{\frac{1}{2^{m+1}}}(x_0) \subset O_m(x_0) \quad (n > n_0)$

mガ任意デアリ、且ツ $\{O_m(x_0)\}$ $(m = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$ ハ x_0 ノ definierendes Umgebungssystem デアツタカラ $\sigma x_n \to x_0$。 σ ハ Homöomorphie ナル故

$$x_n \to \sigma^{-1} x_0 = x.$$

—以上—