596 雑記 IV

$y''=f(x,y,y')$ ニ就イテ

南雲道夫（阪大）

1 第二階常微分方程式

$$y''=f(x,y,y')$$

ノ境界値問題ニツイテハ，線状方程式ノ場合ハ非常ニ多クノ研究ガアルケレドモ，非線状ノ場合ニ関スル研究ハ非常ニ少イヤウデアル。

$(x\,y,\ y')$ ノ範囲ニ相當ナ制限ヲツケレバ，Picard ノ逐次近似法或ハソノ他ノ方法ニヨリ（福原氏，岩波講座，常微分方程式論 124 頁．及ビ Picard: Leçons sur quelques problèmes aux limites de la théorie des équations différentielles.〔Cahiers scientifiques〕參照）。與ヘラレタ二點ヲ通ル積分曲線ノ存在ト一意性ニ對スル解答ガ與ヘラレテキル。

然シ、自然ナ要求カラ考ヘテ見レバ (x, y) ノ範囲ニ關スル制限ハ有意義デアルガ，y' ニ關スル範囲ノ制限ハナイ方ガ望マシイ。尚 (x, y) ノ範囲モ具体的ナ問題ニ應ジテ種々融通ノキク條件ガ欲シイノデアル。

此ノ目的ニ對シテ一ツノサヽヤカナル解答ヲ本紙 107 号ニ於テ述ベタ。次ニソコニアル y' ニツイテノ大サニ關スル條件ガ，本質的ニ (9) ユルメラレルコト（應用上有意義ナ程度ニ）ヲ述ベタイ。（以前ノ論文ヲ見ラレナクトモ考ヘノ筋道ガ分ル様ニ述ベマス）

$\boxed{2}$ 先ヅ y' ニツキ範囲ノ制限ナイ場合ヲ考ヘル．コノ場合ノ問題ニナルノハ，(x, y) ガ問題ノ範囲内ニアルニモカヽワラズ，y' ガ ∞ ニナツタリ或ハ發散スルタメニ積分曲線ガ領域ノ内部デ延長不能ニナル恐レガアル。例ヘバ見掛

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 \ *$$

---

* 107 号 13 頁ノ例 $y''=|y'|^{\frac{3}{2}}$ ハ誤リ

上到ル所（有限ナ所デ）正則ナ方程式ノ一般解ハ

$$y=\pm\sqrt{c-x}+c' \quad \text{又ハ} \quad y=c$$

デ，之レハ（$x=c$，$y=c'$）デ積分曲線ガ延長不能ニナル。（$x=c$，$y=c'$ ハ領域内ノ任意ノ点デアル）

上ノヤウニ，(x, y) ガ問題ノ領域（有界且ツソコデ $f(x, y, y')$ ガ正則デモ）内デ延長不能ニナルコトノナイタメニハ次ノ條件ガアレバ充分デアル。

$$\left|f(x, y, y')\right| \leqq M(1+y'^2)$$

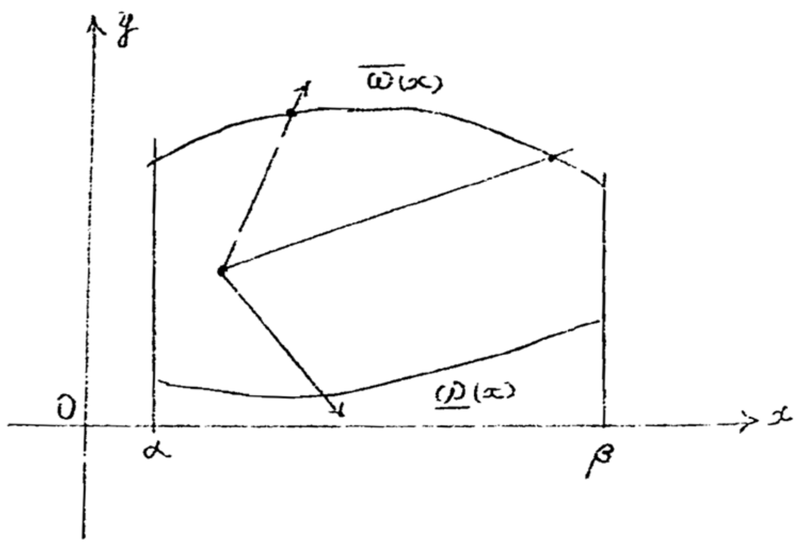
此ノ條件ハ

$$\left|f(x, y, y')\right| \leqq \varphi(|y'|), \int_1^{+\infty} \frac{u}{\varphi(u)}\, du=+\infty$$

ナル條件ニ拡張出来ル。（証明ノ方針ハ同一デアルカラ，簡明ナ形式ノモノヲ掲ゲテオク）

但シ $f(x, y, y')$ ハ $\alpha \leqq x \leqq \beta$，$\underline{\omega}(x) \leqq y \leqq \overline{\omega}(x)$，$|y'|<\infty$ デ正則（連続デ充分）ト仮定スル。

上ノ y' ニツイテノ f ノ大サノ條件ハ，應用上ノ具体的ナ問題ニ於テ満サレテキル場合ガ多イ。



尚上ノ條件カラハ

$$y'(a) \qquad (\alpha \leqq a < \beta)$$

ガ充分大ナラバ $y(x)$ ハ $\overline{\omega}(x)$ ト交ハリ，又 $y'(a)$ ガ充分小（負デ絶對値ガ充分大ナラバ）$y(x)$ ハ $y=\underline{\omega}(x)$ ト交ハル。

証明ノ方針　$|y'|$ ガ充分大ナル所ダケ，從ツテ y' ノ符号ガ一定ナ所ダケ考ヘレバヨイ。ノミナラズ $y'>0$ ナ所ダケヲ考ヘル。（$y'<0$ ナラバ y ノ代リニ $-y$ ヲ考ヘヨ。）シカラバ $y''=f(x,y,y')$，$|f(x,y,y')| \leqq \varphi(|y'|)$ ニヨリ，

$$\left|\frac{y'y''}{\varphi(y')}\right| \leqq y'$$

故ニ

$$\left|\int_{y'(a)}^{y'(x)} \frac{u\,du}{\varphi(u)}\right| \leqq y(x)-y(a) \leqq L.$$

但シ $L=\mathrm{Max}\,(\overline{\omega}(x)-\underline{\omega}(x))$.

コレト

$$\int_1^\infty \frac{u\,du}{\varphi(u)}=\infty$$

カラ，上ノ要求ハスベテ満サレル。

$\boxed{3}$ 次ニ上述ノ條件ガ成立シテキルトキ，領域 $\mathcal{D}$ 即チ

$$\alpha \leqq x \leqq \beta, \quad \underline{\omega}(x) \leqq y \leqq \overline{\omega}(x)$$

内ノ任意ノ二点 (x_0, y_0)，(x_1, y_1) $[x_0 < x_1]$ ヲ通リ積

分曲線が $\mathfrak{D}$ 内ニ存在スル充分條件ヲ考ヘヨウ。

$\mathfrak{D}^*$ ヲバ $(x, y) \in \mathfrak{D}$, $|y'| < \infty$ ナル (x, y, y') ノ領域トシ, $f(x, y, y')$ が $\mathfrak{D}^*$ デ正則（$f, f_y, f_{y'}$ 連続ナラバ充分）トスル。今 $\underline{\omega}(x)$ 及ビ $\overline{\omega}(x)$ ハ $\alpha \leqq x \leqq \beta$ デ微係数が連続，第二回微係数ハ區分的ニ連続トシ次ノ微分不等式ヲ満足スルモノトスル。

$$\frac{d^2\overline{\omega}}{dx^2} < f(x, \overline{\omega}(x), \overline{\omega}'(x)), \quad \left[\overline{\omega}'(x) = \frac{d\overline{\omega}}{dx}\right]$$

$$\frac{d^2\underline{\omega}}{dx^2} > f(x, \underline{\omega}(x), \underline{\omega}'(x)).$$

証明ノ方針　　$x_1 = \beta$

従ッテ　$\underline{\omega}(\beta) \leqq y_1 \leqq \overline{\omega}(\beta)$ ト假定スルコトが出来ル。

先ヅ $\boxed{2}$ ニヨリ，$y = y(x)$ ナル積分曲線ハ $\mathfrak{D}$ ノ境界ニ衝突スルマデ延長出来ル。又 $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = \alpha'$ トスレバ $y(x)$ ハ α' ニツイテ連続ニ変化スル。

次ニ $\overline{\omega}(x)$ 及ビ $\underline{\omega}(x)$ ニ関スル上ノ微分不等式ニヨリ，$y(x)$ が $\mathfrak{D}$ ノ境界ニ触レル所デハ，コノ曲線ハ境界ニ切シナイデ交ル。故ニソノ交点ハ α' ニツイテ連続ニ変化スル。

所が α' が $-\infty$ ニ近ヅケバ，$y(x)$ ハ $\alpha < x < \beta$ デ $y = \underline{\omega}(x)$ ト交ハリ，又 α' が $+\infty$ ニ近ヅケバ $y(x)$ ハ $\alpha < x < \beta$ デ $y = \overline{\omega}(x)$ ト交ハル。故ニソノ途中デ $y = y(x)$ ハ $x_1 = \beta$, $\underline{\omega}(\beta) \leqq y_1 \leqq \overline{\omega}(\beta)$ ナル点（$\mathfrak{D}$ ノ境界上ノ点）ヲ通ル様ナ α' が存在スル。

$\boxed{4}$ 存在條件ノ次ギニハ一意性ガ問題デアル。然シ未ダ好都合ナモノガ見出サレナイ。問題ノ難点ハ y' ニツキ有界デナイ所ニ存在スル。

先ヅ特ニ $f(x, y, y')$ ガ y ニツキ純増加トスレバ領域内ノ二点 (x_0, y_0), (x_1, y_1) ヲ通ル。

$$y'' = f(x, y, y')$$

ノ積分曲線ハ只一ツデアル。

(証明) 若シ問題ノ積分ガ二ツアルトキ，之レヲ $y_1(x)$, $y_2(x)$ トシ，

$$y_2'(x_0) > y_1'(x_0)$$

又始メテ $y_2'(x) = y_1'(x)$ ナルヤウナ x ヲ ξ トスレバ，ξ ニ於テ矛盾ヲ生ズル。

次ニ $y = \rho(x)u$ $[\rho(x) > 0]$ ナル変換ヲ行ヘバ

$$u'' = \frac{1}{\rho}\left[f(x, \rho u, \rho' u + \rho u') - \rho'' u - 2\rho' u'\right]$$

$$= F(x, u, u')$$

故ニ $\dfrac{\partial F}{\partial u} > 0$ ナル條件ハ

$$f_y \rho + f_{y'} \rho' - \rho'' > 0$$

ナルヤウナ $\rho(x) > 0$ ノ存在ト同等デアル。

特ニ $|f_y| \leqq A$, $f_{y'} = 0$ ナラバ

$$\rho(x) = \sin\{\sqrt{A'}(x - x_0')\} \qquad (A' > A,\ x_0' < x_0)$$

故ニ $x_1 - x_0 < \dfrac{\pi}{\sqrt{A}}$ ナラバ解ハ只一ツデアル。