595. 函數論ノ一演習問題

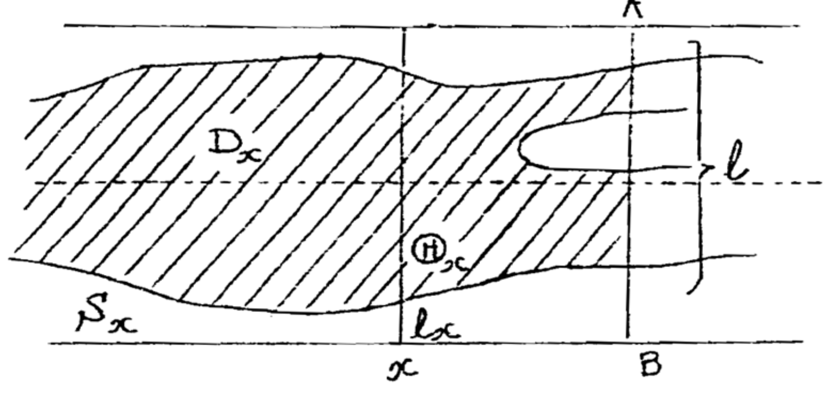
早田 文一

z平面上ニアル Halbstreifen $S: -\infty < x < +\infty$, $-\frac{l}{2} < y < \frac{l}{2}$ $(z = x + iy)$ ノ内部ニアル任意ノ schlichter Bereich ヲ D トスル。

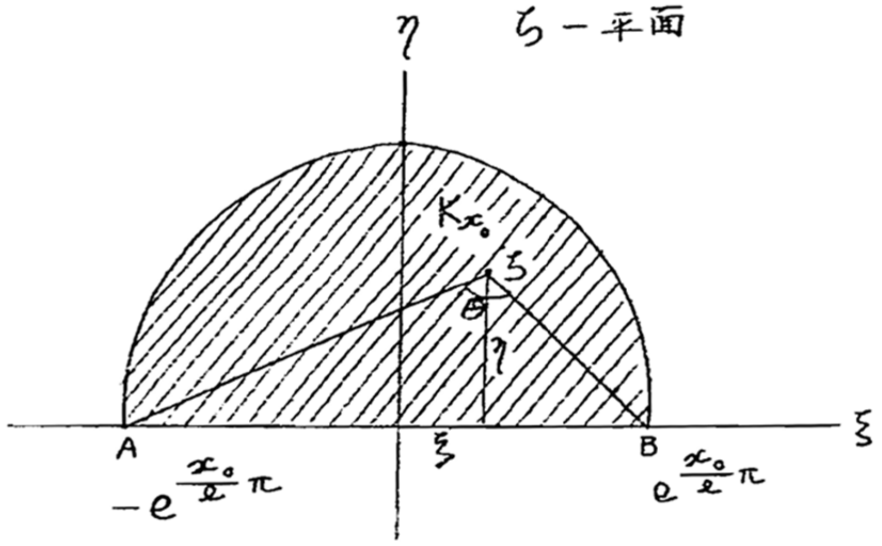
D ヲ y軸ニ平行ナ直線（座標 x）デ切ッタトキ出來ル Querschnitt ヲ Θ_x トスル。D ノ Θ_x ノ左側ニアル部分ヲ D_x デ示ス。S ニ關シテモ同様ニ座標 x ナル Querschnitt ヲ l_x. ソレヨリ左ニアル部分ヲ S_x トスル。

今 Θ_{x_0} ノ上デ 1, D_{x_0} ノ殘リノ周辺デ 0 トナル調和函數（harmonisches Masz）ヲ $\omega(z, \Theta_{x_0}, D_{x_0})$ デアラハシ又. $\Omega(z, l_{x_0}, S_{x_0})$ ヲ S_{x_0} ニ關シテ同様ナ意味ヲ有スル調和函數トスレバ Prinzip der Gebietserweiterung ニヨリ D_{x_0} 内ノ任意ノ z ニツキ次ノ不等式ガ成立スル。

(1) $\quad \omega(z, \Theta_{x_0}, D_{x_0}) \leqq \Omega(z, l_{x_0}, S_{x_0})$



第一圖



第二圖

先ヅ $\Omega(z, l_{x_0}, S_{x_0})$ ヲ求メンガタメ *Halbstreifen* S_{x_0} ヲ次ノ変換ニヨリ ζ 平面ノ上半面ニ位スル半円ニ一對一ニ寫像スル。

$$\zeta = i e^{\frac{z}{l}\pi}$$

シカルトキハ *Halbstreifen* ノ右側ノ *Berandung* AB ハ半径 $e^{\frac{x_0}{l}\pi}$ ナル半円周ニウツサレ、上，下ノ *Berandung*. A∞, B∞ ハ夫々負軸，正軸ニ一致スル半径ニウツサレル。*harmonisches Marz* ハ一對一ノ等角寫像ニヨリ変ラナイノデアルカラ *Halbkreis* K_{x_0} ニツキ Ω ヲ求メル。K_{x_0} 内ニ任意ノ一点 ζ ヲトリコレガ A, B ニ對スル角ヲ θ トスレバ

$$\Omega = a\theta + b$$

円周上デ 1，直径上デ 0 デアル條件カラ a, b ヲ求メテ

$$\Omega = \frac{2}{\pi}(\pi - \theta)$$

$\zeta=\xi+i\eta$ トスレバ

$$\theta=\operatorname{arc\,tg}\frac{e^{\frac{x_0}{l}\pi}-\xi}{\eta}+\operatorname{arc\,tg}\frac{e^{\frac{x_0}{l}\pi}+\xi}{\eta}$$

デアルカラ簡単ナ三角法ノ計算ニヨリ

$$(2)\qquad \Omega=\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\eta e^{\frac{x_0}{l}\pi}}{e^{\frac{2x_0}{l}\pi}-\xi^2-\eta^2}$$

$$\zeta=\xi+i\eta=e^{\frac{z}{l}\pi}i \qquad\qquad z=x+iy.$$

Ω ハ l_x ノ上デハ、ソノ中点デ最大値ヲトルカラ $y=0$ 即チ

$$\xi+i\eta=e^{\frac{x}{l}\pi}i\,, \qquad \xi=0,\ \ \eta=e^{\frac{x}{l}\pi}$$

ヨッテ (2) ヨリ l_x 上ノ Ω ノ最大値トシテ次ノ値ヲ得ル。

$$(3)\qquad \Omega=\frac{2}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{2e^{\frac{x+x_0}{l}\pi}}{e^{\frac{2x_0}{l}\pi}-e^{\frac{2x}{l}\pi}}=\frac{4}{\pi}\operatorname{arc\,tg}e^{\frac{x-x_0}{l}\pi}$$

次ニ上ノ Ω ヲ用ヒテ Carleman ノ微分不等式ノ方法ヲ繰返シテ見ル。$x<X_0<x_0$ ナルトキ次ノ不等式ガ成立スル。

$$\omega(z,\mathfrak{H}_{x_0},D_{x_0})\leqq\omega(z,\mathfrak{H}_{x_0},D_{x_0})\,\Omega(z_0,l_{x_0},S_{x_0})$$

$$(\Re z_0=X_0\,,\ \Omega \text{ ハ } l_{X_0} \text{ 上ノ最大値トスル})$$

$\mathfrak{H}_{X_0}$ ノ上デハ右辺ノ第一因数ハ 1. 残リノ不等式ハ (1) ニヨリ正シイ。又 D_{X_0} ノ残リノ Berandung デハ両辺

共ニ0デ正シイ。ヨツテ内点zニツキ上ノ不等式ハ成立スル。(Maximumprinzip) コレヲ変形スルト

$$\omega(z, x_0) - \omega(z, X_0) < -\{1 - \Omega(z_0, x_0)\}\,\omega(z, X_0)$$

但シ、$\omega(z, x_0)$, $\Omega(z_0, x_0)$ ハ夫々ノ略記号デアル。ヨツテ $X_0 \longrightarrow x_0$ ナラシムレバ $x < x_0$ ナル任意ノzニ對シテ

$$(4) \quad \frac{d\omega(z, x_0)}{dx_0} \leqq -E\,\omega(z, x_0)$$

但シ

$$E = \lim_{X_0 \to x_0} \frac{1 - \Omega(z_0, x_0)}{x_0 - X_0}$$

コヽノ Ω ニ (3) ノ値ヲ代入スレバ

$$E = \frac{2}{l}$$

故ニ、$x < x_1 < x_2$ ナルトキ (4) ヲ x_1, x_2 間ニ積分スルコトニヨリ

$$(5) \quad \omega(z, x_2) \leqq \omega(z, x_1)\, e^{-\frac{2}{l}(x_2 - x_1)}$$

Carleman ハ広イ假定ノモトノ二次ノ不等式ヲ出シタ。

$$\omega(z, x_2) \leqq \omega(z, x_1)\, e^{-\frac{4}{\pi}\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx_0}{\Theta(x_0)}}$$

今ノ場合ノ様ニ Dx_0 が Sx_0 ニ含マレルナラバ

$$\Theta(x_0) \leqq l$$

デアルカラ

$$-\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx_0}{H x_0} \leqq -\frac{x_2-x_1}{l}$$

故ニ

$$\omega(x, x_2) \leqq \omega(x, x_1)\, e^{-\frac{4}{\pi}\frac{x_2-x_1}{l}}$$

$-2 < -\frac{4}{\pi}$ デアルカラ、コレヨリハ (5) ノ方ガ精確デアル。然シコレハ Dx_0 ガ Sx_0 ニ近イ図形ノトキニカギルノデアル。実際 $H(x_0)$ ガアル x_0 デ非常ニ小ナルトキ コノ前後ニ亘ル積分區間 (x_1, x_2) デハ

$$-\frac{4}{\pi}\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx_0}{H(x_0)} < -\frac{2}{l}(x_2-x_1)$$

トナルデアラウ。