594. Kolmogoroff ノ論文紹介 II

小松　醇郎（阪大）

IV

Ⓐ 前ノ代数複体群，ベッチ群等ノ元（element）ハ任意ノ bicompakt ナ部分集合凡ベテヲ使ツテ定義サレル。然シ実際ニベッチ群ヲ取扱フ場合，凡ベテノ部分集合ヲ考ヘル代リニ適當ナ條件ヲ充ス部分集合系ノミ考ヘル。是レ Systèmes fondamentaux[1] S デアル。一般ノベッチ群ガ此ノ上ノミデ考ヘタベッチ群ト同型ナルコトヲ証明スル。[2]

---

1) Kolmogoroff; Propriétés des groupes de Betti des espaces localement bicompacts. Compt. Rendus. t. 202.

2) 下ベッチ群ノ reduction theorem 即チ Kolmogoroff ノ Second Théorème de Réduction ハ是ダケダハ不完全ダト思フ。上ベッチ群ニ關スル Premier Théorème de Reduction ト前ノ dual ノ関係トヲ使ヘバ完全ニナル。Premier Théorème ヲ離レテ單独ニ Second Théorème de Reduction ヲ完全ナルモノニ作リ直スコトハ一寸難シサウデス。或ハ簡單ニ出来ルノカモ知レナイノデスガ兎ニ角現在ハ試ミハ不成功デシタ。又 reduction theorem ノ此処ノ証明ハモット適切ニ出来ルノカモ知レマセン。御教示アラバ幸デス。

空間 R ノ一ツノ *décomposition* Σ：

$$R = \sum B_\alpha,$$

茲ニ B_α 互ヒニ *disjoint*，α ハ有限又ハ無限個。

Σ ガ *localement finie* トハ

R ノ任意ノ一ツノ *bicompact* ナ部分集合ハ B_α ノ有限個トシカ共有点ヲ持タナイ。

Système fondamental S トハ

1° *localement finie* ナ *decomposition* Σ ノ集合系。

2° Σ', Σ'' ガ S ニ属スル二ツノ *decomposition* トスレバ $\Sigma = \Sigma' \cdot \Sigma''$ ナル *décomposition* ガ又 S ニ属スル．茲ニ Σ ハ，Σ' ノ *Element* $B'_{\alpha'}$ ノ中デ Σ'' ノ一ツノ *element* ト共通ナ部分ハ Σ ノ *element* ニハイル トスル。即チ

$$B'_{\alpha'} \cdot B''_{\alpha''}$$

ハ若シ *Nullmenge* デナイナラバ（任意ノ α', α'' ニ對シテ）是レハ Σ ノ一ツノ *element* ト考ヘル。

3° R ノ任意ノ一ツノ *bicompact* ナ *Sous-ensemble* A ヲ任意ノ有限個[1] ノ開集合 U_1, ……, U_n デ被フトキ次ノ條件ヲ充ス *décomposition* Σ ガ S ノ中ニ少クモ一ツ存在ス。即チ Σ ノ任意ノ *element* デ A ト共有点ヲ持ツモノハ必ズドレカ U_i ニ含マレル。

---

1) *bicompact* ダカラ可能。

以上ヲ充タス S ハ一般ニハ *décompositions* ノ *abzählbar* 以上ヲ含ム.

空間 R ガ *separabel* ナラバ *abzählbar* ノ Σ ヲ含ム S ガトレル。[1] 特ニ R ガ *Kompaktum* ナラバ *Alexandroff* ノ *Unterteilung* ニヨル *Überdeckungsfolge* ヲトレバ宜シイ。

一般ノ *localement bicompact* ナ R デ斯様ナ S ガ存在シ得ルカト云フコトハ例ヘバ *localement finie* ナ *décompositions* ノ凡ベテノ S ニ入レレバ宜シイ。[2]

---

1) *Separabel* ナル故 *abzählbar* 個ノ *Umgebungssysteme* $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{U}_n, \cdots\cdots$ ガトレル。
$R = \mathfrak{U}_i + (R - \mathfrak{U}_i)$ ヲ Σ_i ナル decomposition トシ S ハ此ノ Σ_i カラ $\Sigma_i \Sigma_j$ ノ如ク作ラルルモノ全部ヲトル。
適当ニ勘定スレバ *abzählbar*.

2) 然シ斯様ナ S デハベッチ群ノ取扱ヒヲ簡単ニスルタメニ導入シタ *Système fondamental* ガ意味ヲナサナクナル。実際ニ簡単ナル S ヲ求メルコトガ重要ニナル。

Ⓑ Premier Théorème de Reduction.

S ヲ或ル *Système fondamental* トスル。z_0^n ヲ一ツノ上輪体トスレバ z_0^n ト *homologue*[1] ナ *cycle* y_0^n デ,

---

1) $z_0^n - y_0^n$ ガ或ル $(n-1)$ 次元複体 f^{n-1} ノ *Rand* ニナッテ居ル。

ソノ Arguments デアル各点ガ $\mathcal{S}$ ノ中ノ一ツノ décomposition Σ ノ夫々ノ elements ヲ動ク間ハ y_0^r ノ値ハ Constant デアル様ナ y_0^r ガ存在スル。[1]

〔証明〕 $\mathcal{S}_{z_0^r}=\{M_0, M_1, \cdots\cdots, M_n\}$ トスル。M_i ヲ elements ニ含ム décomposition ハ $\mathcal{S}$ ノ中ニナイ。

一度ニ y_0^r ヲ作ラズニ順次ニ $z_0'^r$, $z_0''^r$, $\cdots\cdots$ ト作ッテ有限回ノ後 y_0^r ヲ作ル。操作ト証明ハ各回同様デアルカラ $z_0'^r$ ダケヲ作ル。

$\overline{M_0}$ bicompact, Système fondamental $\mathcal{S}$ ノ條件 3° ニヨリ Σ ガ exist シ、ソノ elements ノ一部分 $B_1+B_2+\cdots\cdots+B_l\supset M_0$. 且シ $B_i\subset U_i$, 且ツ $\overline{M_0}\cdot\overline{M_j}=0$ ナラバ $\overline{\left(\sum_{i=1}^{l}U_i\right)}\cdot\overline{M_j}=0$[2]

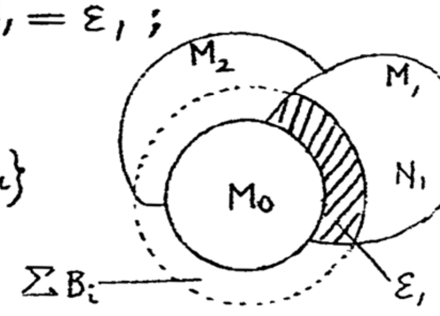
ナル如クトル。 勿論 $\overline{\sum B_i}\cdot\overline{M_j}=0$.

$\overline{M_0}\cdot\overline{M_1}\neq 0$ ナラバ $(\sum B_i)\cdot M_1=\varepsilon_1$;

$M_1-\varepsilon_1=N_1$ トスレバ[3]

$$\mathcal{S}_{z_0'^r}=\{M_0+\varepsilon_1, N_1, M_2, \cdots\cdots, M_n\}$$

且ツ



1) 即チ複体 y_0^r ニ對シ disjoint ナ bicompact ナ有限個ノ集合系 $\mathcal{S}_{y_0^r}$ ガ對應スルガ此ノ $\mathcal{S}_{y_0^r}$ ノ sous-ensemble ガ凡テ Σ ノ element デアル。

2) Hausdorffscher Raum ナラバ可能。

3) $\varepsilon_1=0$, $N_1=0$ ナルコトアリ得ル。問題ハ簡單ニナル。

$$z_0'^{n}(M_0+\varepsilon_1, M_{i_1}, \text{------}, M_{i_n})$$
$$= z_0^{n}(M_0, M_{i_1}, \text{------}, M_{i_n})^{1)}$$

ト定メル。

故ニ $f^n = z_0^n - z_0'^n$ ハ

$$S_{f^n} = \{M_0, \ \varepsilon_1, \ N_1, \ M_2, \text{------}, M_n\}.$$

$$f^n(\varepsilon_1, M_{i_1}, \text{------}, M_{i_n}) = z_0^n(M_1, M_{i_1}, \text{------}, M_{i_n})$$
$$- z_0'^n(M_0, M_{i_1}, \text{------}, M_{i_n}).$$

今 $(n-1)$ 次元複体 f^{n-1} トシテ

$$S_{f^{n-1}} = \{M_0, \varepsilon_1, N_1, M_2, \text{------}, M_n\}$$

$$\begin{cases} f^{n-1}(\varepsilon_1, M_{i_1}, \text{----}, M_{i_{n-1}}) = z_0^n(M_0, M_1, M_{i_1}, \text{----}, M_{i_{n-1}}) \\ \quad (\ \varepsilon_1 \text{ヲ含マヌトキ}) = 0. \\ f^{n-1}(\varepsilon_1, N_1, \text{----------}) = 0 = z_0^n(M_1, M_1, \text{-------}) \end{cases}$$

ヲトレバ

$g_0 f^{n-1}$ ハ

$$(M_0, \varepsilon_1, N_1, M_2, \text{-------}, M_{n-1}) = \sum(-1)^i f^{n-1} = 0$$

$$(M_0, \varepsilon_1, M_2, \text{-----}, M_n) = f^{n-1}(\varepsilon_1, M_2, \text{-------}, M_n) \qquad M_i \neq N_1.$$
$$= z_0^n(M_0, M_1, M_2, \text{-------}, M_n)$$

$$(\varepsilon_1, N_1, M_2, \text{-----}, M_2) = -z_0^n(M_0, M_1, M_2, \text{-----}, M_2) \qquad M_i \neq M_0.$$

$$(\varepsilon_1, M_2, \text{-----}, M_{n+1}) = \sum_{i=2}(-1)^{i-1} f^{n-1}(\varepsilon_1, M_2, \text{---}, \widehat{M}_i, \text{----}, M_{n+1})$$
$$M_i \neq M_0, N_1.$$

$$= \sum_{i=2}^{n+1}(-1)^{i-1} z_0^n(M_0, M_1, M_2, \text{-----}, \widehat{M}_i, \text{-----}, M_{n+1})$$

---

1) Menge 内ノ点ノ代リニ Menge デ点ノ位置ヲ表シタ。

$$(M_{i_0}, M_{i_1}, \cdots\cdots, M_{i_r}) = 0. \qquad M_{ij} \neq \varepsilon_1.$$

以上何レノ場合モ　$g_0 f^{r-1} = f^r = z_0^r - z_0'^r$.

証明スベキハ　$g_0 f^{r-1}(\varepsilon_1, M_2, \cdots\cdots, M_{r+1})$ ノ場合.

z_0^r ハ Cycle.

$$\therefore \quad g_0 z_0^r(M_0, M_1, M_2, \cdots\cdots, M_{r+1})$$

$$= z_0^r(M_1, M_2, \cdots\cdots, M_{r+1}) - z_0^r(M_0, M_2, \cdots\cdots, M_{r+1})$$

$$+ \sum_{i=2}^{r+1}(-1)^i z_0^r(M_2, \cdots\cdots, \hat{M}_i, \cdots\cdots, M_{r+1})$$

$$= 0$$

$$\therefore \quad g_0 f^{r-1}(\varepsilon_1, M_2, \cdots\cdots, M_{r+1})$$

$$= z_0^r(M_1, M_2, \cdots\cdots, M_{r+1}) - z_0^r(M_0, M_2, \cdots\cdots, M_{r+1})$$

$$= f^r(\varepsilon_1, M_2, \cdots\cdots, M_{r+1})$$

故ニ $z_0'^r$ ハ z_0^r ニ homologue ナ Cycle.

次ニ又 $(\sum B_i)\cdot M_2 = \varepsilon_2$, $M_2 - \varepsilon_2 = N_2$ トシ

$$S_{z_0''} = \{M_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2, N_1, N_2, M_3, \cdots\cdots, M_n\}$$

ナル同様ナ Cycle $z_0''^r$ ヲ作ル。

$\overline{M}_0 \cdot \overline{M}_j \neq 0$ ナル凡ベテノ M_j 及ビ $R_n - \sum_{i=0}^{n} M_i$ ニツキ

同様ナ操作ヲ行ヒ Cycle

$$y_0'^r, \quad S_{y_0'} = \{M_0', N_1, N_2, \cdots\cdots, M_k, \cdots\cdots, M_n\}$$

ヲ得レバ M_0' ヲ element トスル $\sum$ が存在ス. 残リノ

ensemble N, M ニツキ同様ニ行ヒ結局

z_0^r ト homologue ナ定理ヲ充タス Cycle y_0^r ヲ

得。　以上

© Second Théorème de Reduction

$\varphi^r(\mathcal{E}_0, \cdots\cdots, \mathcal{E}_r)$ 一ツノ下輪体(cycle)トス。Système fondamental S ノ décompositions ノ éléments ニナル bicompact ナ sous-ensembles ノミ(T(S) デ表ハス)ヲ考ヘルナラバ

$$\varphi^r(\mathcal{E}_0, \cdots\cdots, \mathcal{E}_r) = 0$$

然ラバ φ^r ハ任意ノ Sous-ensembles ニ對シテ homologue zéro.

証明: décompositions ノ éléments ニテハ φ^r homologue à zéro[1] ナラバ任意ノ Sous-ensembles ニテ homologue Zéro ヲ証明ス。[2)][3)]

---

1) 此ノ意味ハ décomposition ノ elements ノミデ定義サレタ $(r+1)$ 次元複体 φ^{r+1} が存在シソコデ

$$g_u \varphi^{r+1} = \varphi^r$$

2) 之レハ勿論定理ノ結果ヲ含ム。

3) 此ノ定理が不完全ナルコトハ今 T(S) ノミデ定義サレタ r 次元複体群 $\Phi^r(S)$, 輪体群 $Z^r(S)$, 境界群 $\Gamma^r(S)$; 全体ノ bicompact ナ Sous-ensembles デ定義サレタ夫々ノ群 Φ^r, Z^r, Γ^r トスレバ

$$\Phi^r \xrightarrow{\text{homomorph auf}} \Phi^r(S)$$

對應ハ Φ^r ノ元ヲ, T(S) ノミデ考ヘレバ一ツノ $\Phi^r(S)$ ノ元デアル。ソレヲ對應。homomorph auf ナルコトハ $\Phi^r(S)$ ノ元ヨリ T(S) デナイ ensembles ニモ定義シテ行ケバヨイ。複体 φ^r ノ條件ヲ充タスヤウニ出来ル。

然シ此処デハコノコトハベッチ群如何ノ問題ニ関係シテ来ナイ。

$$Z^r \xrightarrow{\text{homomorph in}} Z^r(S).$$

$$\Gamma^r \xrightarrow{\text{homomorph in}} \Gamma^r(S).$$

今 Z^r ノ中デ $T(S)$ ノ zéro élément ニ移ル Cycle ノ群 O^r トスレバ定理ヨリ

$$\Gamma^r \supset O^r$$

故ニ $Z^r - O^r$ isomorph in $Z^r(S)$

$\Gamma^r - O^r$ isomorph in $\Gamma^r(S)$

故ニ $B_u^r(R, Ⓗ)$ ハ $B_u^r(R, Ⓗ, S)$ ノ Untergruppe ニ isomorph ニナル。$T(S)$ ダケデ $B_u^r(R, Ⓗ, S)$ ヲ求メテモ $B_u^r(R, Ⓗ)$ ニ isomorph カドウカ分ラナイ。ソレヲ示スニハ $Z^r \to Z^r(S)$ ガ全体ニ移ルト云フ reduction theorem ガ必要デアル。此ノ証明ガ出来ナカッタノデス。

是レハ Charakter ノ関係ヲ使ヘバ Premier réduction théorème ヨリ出ル。

$Z_0^r \longrightarrow Z_0^r(S)$ ハ homomorph auf.

$H_0^r \longrightarrow H_0^r(S)$ homomorph auf.

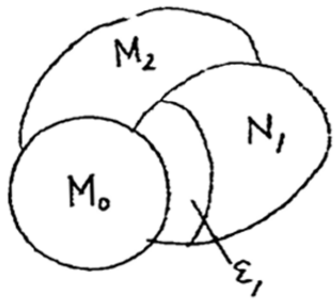
$\therefore\ B_0^r(R, T) \longleftrightarrow B_0^r(R, J, S)$ isomorph auf.

此ノ Charaktergroup ハ夫々 $B_u^r(R, Ⓗ)$, $B_u^r(R, Ⓗ, S)$.

故ニ isomorph デアル。故ニ Premier réduction théorèm ト Charakter group トヲ使フナラベ始メカラ Second Théorème de Réduction ハ不要ニナル。

上輪体ノ場合ト同様ニ一ツ宛 Menge ヲ大キク又ハ小サクシテ行ク。

$M_0, M_1, \ldots\ldots, M_r$ bicompact, disjoint, $T(S)$ ノ elements.



$M_1 = N_1 + \varepsilon_1$,

ε_1, 従ッテ N_1 ハ $T(S)$ ノ elements デハナイトスル。

假定ヨリ

$$\varphi^r(M_0, M_1, \ldots\ldots, M_r) = \varphi^{r+1}(G, M_0, \ldots\ldots, M_r),$$

茲ニ $G \supset \overline{M}_0 + \cdots\cdots + \overline{M}_r$, 且ツ $T(S)$ ノ elements.

φ^{r+1} ハ $T(S)$ ノ elements ノミデ定義サレテ居ルガ今,

$$\varphi^r(M_0, \varepsilon_1, M_2, \ldots\ldots, M_r) = \varphi^{r+1}(G, M_0, \varepsilon_1, M_2, \ldots\ldots, M_r)$$

$$\varphi^r(M_0, N_1, M_2, \ldots\ldots, M_r) = \varphi^{r+1}(G, M_0, N_1, M_2, \ldots\ldots, M_r)$$

$$\varphi^r(\varepsilon_1, N_1, M_{i_2}, \ldots\ldots, M_{i_r})$$
$$= \varphi^{r+1}(G', \varepsilon_1, N_1, M_{i_2}, \ldots\ldots, M_{i_r})$$

ト定義スレバ φ^{r+1} ハ $T(S)$ 及ビ, ε_1, N_1 ニテ定義サレタ函数. additive ナルコトハ φ^r ノ additive ヨリ出ル。

$$\varphi^r(M_0, \varepsilon_1, M_2, \ldots\ldots, M_r) + \varphi^r(M_0, N_1, M_2, \ldots\ldots, M_r) = \varphi^r(M_0, M_1, \ldots\ldots, M_r)$$

$$\therefore\quad \varphi^{r+1}(G, M_0, \mathcal{E}_1, \cdots\cdots) + \varphi^{r+1}(G, M_0, N_1, \cdots\cdots\cdots)$$
$$= \varphi^{r+1}(G, M_0, M_1, \cdots\cdots\cdots).$$

又 $\mathcal{E}_1, N_1$ ガ $T(S)$ ノ M' デ $\mathcal{E}_1' + \mathcal{E}_1''$, $N_1' + N_1''$ ニ分タレタトスレバ

$$\varphi^r(\mathcal{E}_1', M_{i_1}, M_{i_2}, \cdots\cdots\cdots, M_{i_r}) = \varphi^{r+1}(G, \mathcal{E}_1', M_{i_1}, \cdots\cdots, M_{i_r})$$
$$\varphi^r(\mathcal{E}_1'', M_{i_1}, M_{i_2}, \cdots\cdots, M_{i_r}) = \varphi^{r+1}(G, \mathcal{E}_1'', M_{i_1}, \cdots\cdots, M_{i_r})$$

デアルガ之レモ確カ．斯様ニシテ $\mathcal{E}_1$ 及ビ之レト $T(S)$ ノ凡ユル *bicompact* ナ *ensembles* トノ *Durchschnitt* 及ビ差デ作ラルル *Menge* ニテ φ^{r+1} ハ定義サレタ。

此ノ操作デ任意ノ *Sous-ensemble* ニ對シテ φ^{r+1} ヲ定義スレバ結局 $\varphi^r = g_u \varphi^{r+1}$

以上.

V

<u>定理</u> R ガ *kompaktum* ナラバ $B_u^r(R, \textcircled{H})$ ハ通例ノ *Victoris* ノ意味ノ *Betti* 群 $B^r(R, \textcircled{H})$ ト *isomorph*.[1]

<u>証明</u> *Système fondamental* トシテ R ノ *Unterteilungs* ヘ *folge*

$$S = \{\Sigma_1, \cdots\cdots, \Sigma_k, \cdots\cdots\}$$

$$(\Sigma_k)\quad R = B_1^k + \cdots\cdots + B_{s_k}^k,\quad B_i^k \cdot B_j^k = 0\ (i \neq j)$$

B_i^k ノ直徑ハ k ト共ニ 0 ニ *tend* スル。

1) André Kolmogoroff; Les groupes de Betti des espaces métriques Ct. Rendus. t. 202.

S ニ對シ $\sum_i \overline{B}_i^k \supset R$ トシテ Nerv. 故ニ Projektionsspektrum Π_S ガ出來ル。

一ツノ複体 φ^r ニ對シ Π_S デ複体ノ Folge $\{C_k^r\}$ ガ對應ス。

Σ_k ノ Nerv. N_K デ頂点 $(a_{i_0}, \text{------}, a_{i_r})$ ニ對シ

$$C_k^r(a_{i_0}, \text{-----}, a_{i_r}) = \varphi^r(B_{i_0}^k, \text{-----}, B_{i_r}^k)$$

此ノ對應ハ一對一. 即チ $C_k^r = 0$ ナラ φ^r zéro 函數.
Operator g_u ノ関係モ umkehrbar. 即チ

$g_u C_k^r(a_{i_1}, \text{-----}, a_{i_r})$ ノ係数ハ凡エル単体ニテ

$C_k^r(a_e, a_{i_1}, \text{------}, a_{i_r})$ ノ係数ノ和. 之レハ丁度

$$\varphi^r\left(\sum_e B_e, B_{i_1}, \text{------}, B_{i_r}^k\right) = \varphi^r(G, B_{i_1}, \text{-----}, B_{i_r}^k)$$

$$\text{cycle } \varphi^r \longleftrightarrow \text{cycle } \{C_k^r\}$$

$$\text{Rand } g_u \varphi^{r+1} \longleftrightarrow g_u \{C_k^{r+1}\}$$

$\therefore$ $B_u^r(R, Ⓗ, S)$ ト $B_u^r(R, Ⓗ, \Pi_S)$ ト isomorph.

$B_u^r(R, Ⓗ, \Pi_S)$ ト $B_u^r(R, Ⓗ)$ トノ isomorphie ハ既ニ Alexandroff (Ann. of Math. 30) ノ結果デアル。