592. 談話582ニツイテ

井上　正雄（阪大）

本誌131号ニオケル清水教授ノ談話582ニツイテ簡単ナル注意ヲ述ベタイ。

1. $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ トオキ，$u(x,y)$, $v(x,y)$ ガ x, y ニ関シテ無限回偏微分可能ナルトキ $f(z)$ ヲ単ニ *Polygenic function* ト呼ブ。[1)]

コノ函数ノ一点 z ニヲケル *parametric n-th derivative* $\dfrac{d^n f}{dz^n_{\theta(n)}}$ ヲ考ヘヨウ。

コヽニ $\theta(n)$ ハ $\theta(n)=\{\theta_1, \theta_2, \cdots\cdots, \theta_n\}$，$0 \leqq \theta_i < 2\pi$ ナル n 次元空間ニオケル矩形 I^n ノ点デアル。

定義ニヨリ

$$\frac{d^n f}{dz^n_{\theta(n)}} = \prod_{j=1}^{n} \left(\bar{\mathcal{D}} + \mathcal{D} e^{-2i\theta_j}\right) f$$

但シ $\bar{\mathcal{D}} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}\right]$, $\mathcal{D} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right]$

形式的ニ $\bar{\mathcal{D}} f = \dfrac{\partial f}{\partial z}$, $\mathcal{D} f = \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ ト書ケバ

---

1) 普通 *Polygenic function* トハ E. Kasner ニヨリ u, v ノ連続ナ一次ノ偏微分係数ガ存在スルトキニ使ハレテイルガ，上述ノ假定ヲ満足スル函数ヲモ便宜上カク呼ブコトガアル。

$$\frac{d^n f}{dz^n_{\theta(n)}} = \frac{\partial^n f}{\partial z^n} + \frac{\partial^n f}{\partial z^{n-1}\partial \bar{z}} \sum_{j=1}^{n} e^{-2i\theta_j} + \cdots\cdots$$

$$\cdots + \frac{\partial^n f}{\partial z^{n-r}\partial \bar{z}^r} \sum_{(j_1, j_2, \cdots, j_r)}^{(1,2,\cdots,n)} e^{-2i\sum_{k=1}^{r}\theta_{j_k}} + \cdots + \frac{\partial^n f}{\partial \bar{z}^n} e^{-2i\sum_{j=1}^{n}\theta_j}$$

$\theta(n) = \{\theta_1, \theta_2, \cdots\cdots, \theta_n\}$ ニ於イテ $\theta_1 = \theta_2 = \cdots\cdots = \theta_n = \theta$ ナルトキノ

$$\frac{d^n f}{dz^n_{\theta(z)}}$$

ノ値ガ z ニ於ケル所謂 rectilinear n-th derivative $\frac{d^n f}{dz^n{}_\theta}$ トナルワケデアル。

次ニ rectilinear n-th derivative $\frac{d^n f}{dz^n{}_\theta}$ ガ θ ニ無関係ニ定ルトキ，之レヲ單ニ $f^{(n)}(z)$ デ表ハシ，z ニ於ケル f ノ微分ト云フ。

コノ微分ノ定義ハ parametric derivative $\frac{d^n f}{dz^n{}_{\theta(n)}}$ ガ $\theta(n)$ ニ無関係ニ定ルコトデ定義シテモ全ク同一ニナル。何者，イヅレノ場合ニシテモ微分ノ存在ト

$$\frac{\partial^n f}{\partial^{n-j} z \partial^j \bar{z}} = 0 \quad (j = 1, \cdots\cdots, n)$$

トガ同意義デアルカラデアル。

以上ノ準備ノ下ニ談話 582 ニ於イテ $u(x, y)$, $v(x, y)$ ニ関シテ述ベラレタ定理ノ條件ヲ次ノ如ク parametric derivative ヲ使ッテ述ベルコトガ出來ル。

Polygenic function $f(z)$ ガ一点 z_0 ノ近傍

デ解析函数ナルタメニハ次ノ條件ガ必要且ツ充分デアル。

1° z_0 ニテ微分 $f^{(n)}(z_0)$, $n=1,2,\cdots\cdots$, ガ存在スル。

2° z_0 ノ一ツノ閉近傍 $\nabla(z_0)$ ニテ

$$\underset{z\in\nabla(z_0)}{Max.}\ \underset{\theta(n)\in I^n}{Max.}\left|\frac{d^n f}{dz^n}_{\theta(n)}\right| = A_n$$

トオクトキ

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{A_n}{n!}} < +\infty$$

充分ナルコトハ條件2°ヲ談話582ニ於ケル條件ニ導クコトガ出来ルコトヨリ明カデアル。

何者，トクニ $\theta(n)=\{\underbrace{0, 0, \cdots\cdots 0}_{n-j}, \underbrace{\frac{\pi}{2}, \cdots\cdots, \frac{\pi}{2}}_{j}\}$

トスルトキ，

$$A_n \geqq \left|\frac{d^n f}{dz^n}_{\theta(n)}\right| = \left|\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-j}\partial y^j} + i\frac{\partial^n v}{\partial x^{n-j}\partial y^j}\right|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-j}\partial y^j}\right)^2 + \left(\frac{\partial^n v}{\partial x^{n-j}\partial y^j}\right)^2}$$

$$\geqq \left|\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-j}\partial y^j}\right|, \left|\frac{\partial^n v}{\partial x^{n-j}\partial y^j}\right|$$

但シ $\begin{cases} x+iy\in\nabla(z_0) \\ j=0,1,2,\cdots\cdots n \end{cases}$

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{A_n}{n!}} < +\infty$$

ナル條件ヨリ適當ニ正數Kヲ撰ンデ

$$\left|\frac{\partial^n U}{\partial x^{n-j}\partial y^j}\right| \leqq K^n n! \quad \left|\frac{\partial^n V}{\partial x^{n-j}\partial y^j}\right| \leqq K^n n!$$

ナラシメ得ルカラデアル。

必要ナルコトモ全ク同様デアル。

2. *local* ニ述ベラレタ定理ヲ次ノ如ク *Global* ニ述ベルコトモ出來ル。

Polygenic function $f(z)$ が領域Dニテ解析函數ナルタメニハ、次ノ條件が必要且ツ充分デアル。

$1°$ アル一点 $z_0(\in D)$ ニテ微分 $f^n(z_0)$, $n=1,2,$ ……… が存在スル。

$2°$ 任意ノ部分閉領域 $\Delta(\subset D)$ ニヲイテ

$$\underset{z\in\Delta}{Max.}\ \underset{\theta(n)\in I^n}{Max}\left|\frac{d^n f}{dz^n}_{\theta(n)}\right| = A_n$$

トスルトキ

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{A_n}{n!}} = L(\Delta) < +\infty$$

充分ナルコト。

D内ニ任意ニ一点 z ヲ取リ z ト z_0 トヲDニ含マレル Jordanbogen J デ結ビ，之レヲ完全ニ含ム閉領域ヲΔトス。

シカルトキ 1. ニ於ケル計算ヨリ正數 $K(\Delta)$ ヲ

$$\underset{z\in\Delta}{Max}\left|\frac{\partial^n U}{\partial x^{n-j}\partial y^j}\right| \leqq K(\Delta)^n n!$$

$$\underset{z\in\Delta}{Max}\left|\frac{\partial^n V}{\partial x^{n-j}\partial y^j}\right| \leqq K(\Delta)^n n!$$

ナル如ク撰ブコトガ出来ル。

z_0 ニ於イテハ 1. ノ定理ガ成立スルカラ z_0 ノ或近傍 $U(z_0)$ ニテ $f(z)$ ハ解析函数デアル。 Δ ノ境界ト J トノ最短距離ヲ $\delta(>0)$ トシ

$$min.\left(\frac{1}{2K(\Delta)}, \delta\right) = \rho \ (>0)$$

トスルトキ $U(z_0)$ ヲ z_0 ヲ中心トスル半径 ρ ノ円 C_0 ニトルコトガ出来ル。

C_0 ニ含マレ且ツ J 上ニアル一点 z_1 ヲ $|z_0 - z_1| > \frac{\rho}{2}$ ナル如ク適当ニ撰ブ。シカラバ z_1 ニテ $f(z)$ ハ z_0 ニ於ケルノト同一ノ條件ヲ満足シテヰルカラ $f(z)$ ハ z_0 ヲ中心トスル半径 ρ ノ円 C ノ内デ解析函数デアル。シカルニ C_0 ト C_1 トノ共通部分デハ両者一致スル故 $f(z)$ ハ $C_0 + C_1$ デ解析函数デアル。之レヲ有限回繰返シテ z ニマデ到達スルコトガ出来ル、即チ $f(z)$ ハ z ノ近傍デ解析的デアル。然ルニ z ハ任意ノ点デヨカッタラ，結局 $f(z)$ ハ D 全体デ一ツノ解析函数ナルコトガ解ル。

必要ナルコト。

Δ ヲ任意ノ部分閉領域トスレバ Δ 内ノ一点 z_0 ニ於テハ z_0 ノ適当ナ閉近傍 $\nabla(z_0)$ ニテ

$$\underset{z \in \nabla(z_0)}{Max}\left|\frac{d^n f}{dz^n}\right| \leqq \eta(z_0)K(z_0)^n n!$$

$$\eta(z_0),\ K(z_0) > 0$$

Δハ閉ナル故，カヽル近傍ノ有限個 $\nabla(z_i)$ $(i=1,\cdots\cdots,N)$ デΔヲ被ヒ

$$\left.\begin{array}{l} \underset{i}{Max.}\ \eta(z_i)=\eta \\ \underset{i}{Max.}\ K(z_i)=K \end{array}\right\} \text{トスレバ}$$

$$A_n = \underset{z \in \Delta}{Max}\left|\frac{d^n f}{dz^n}\right| \leqq \eta K^n n!$$

$$\therefore \quad \overline{\lim}\sqrt[n]{\frac{A_n}{n!}} < +\infty$$

3. $u(x, y)$, $v(x, y)$ ヲ (x, y) ノ実解析函数トスルトキ 1. ニヲケル定理ノ特別ノ場合トシテ次ノコトが云ヘル。

一点 z_0 デ $f(z)$ ノ微分 $f^n(z_0)$, $n=1, 2, \cdots\cdots$, が存在スレバ $f(z)$ ハ z_0 ノ近傍デ解析函数デアル。

シカシ，コレダケノ証明ナラバ Quasi analytic function ノ理論ヲ使ハズトモ次ノ如キ方針デ証明出来ヤウ。

$z_0=0$ トシテ考ヘル。

假定ヨリ

$$u(x, y)=\sum_{m,n} a_{mn} x^m y^n$$

$$v(x, y) = \sum_{m,n} b_{mn} x^m y^n$$

$$f(z) = \sum_{m,n} (a_{mn} + i b_{mn}) x^m y^n$$

故ニ z, $\bar{z}$ ヲ独立変数ト考ヘテ

$$f(z) = \sum_{m,n} c_{mn} z^m \bar{z}^n$$

ト（z, $\bar{z}$）ノ解析函数ニ展開出来ル。

シカルニ $f^n(0)$ ノ存在ハ

$$\left(\frac{\partial^n f}{\partial z^{n-j} \partial \bar{z}^j}\right)_0 = 0 \qquad (j = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

ナルコトニ外ナラヌ。

故ニ $f(z)$ ノ（z, $\bar{z}$）ニ関スル展開ハ $\bar{z}$ ノ項ヲ含ミ得ヌ。

即チ $f(z)$ ハ z ノ解析函数デアル。