591. 雜記 III

南雲 道夫（阪大）

§ 函數空間ニ於ケル平易ナ一例

$\boxed{1}^{*}$ 區間 $a \leqq x \leqq b$ ニ於ケル連續函數 $f(x)$〔$f(x)$ ハ實數〕ノ全体カラ成ル集合ニ於イテ，ソノ各要素 $f(x)$ ニ

$Norm$（絶對値ノ如キモノ）$|f|$ヲ次ノ如ク定義シタトキ此ノ集合ヲ C デ表ハス。

$$|f| = \underset{a \leqq x \leqq b}{Max} \left[|f(x)| \right]$$

C ニ於ケルニツノ要素 f_1, f_2 ノ距離ヲ

$$|f_1 - f_2| \leqq \underset{a \leqq x \leqq b}{Max} \left[|f_1(x) - f_2(x)| \right]$$

トスルトキ，C ハ完全ナ距離空間（$Cauchy$ ノ收斂條件ガ成立スル）トナル。何トナレバ C ノ距離ノ意味ニ於ケル收斂ハ，$a \leqq x \leqq b$ ニ於ケル一様收斂デアルカラ。

次ニ C ニ於テハ，C 内デ至ル所密ニ分布セル可附番集合ガ含マレテキル。〔C ガ $separable$ デアルトイフ〕。

何トナレバ $a \leqq x \leqq b$ ヲ n 等分シ，ソノ各分点デ有理数値ヲトルヤウナ多角形函数〔相隣ル分点ノ間デ一次函数トナル連續函数〕ノ全体ガソレデアルカラ。

又 C ノ部分集合 $\mathfrak{M}$ ガ C 内デ緊ッテキル〔$\mathfrak{M}$ ノ任意ノ無限部分集合ガ C ニ於ケル集積点（函数）ヲ有スルコト〕爲メニハ，$\mathfrak{M}$ ガ一様ニ有界且ツ同程度ニ連續ナルコトガ必要且ツ充分デアル（$Ascoli$-$Argela$ ノ定理）.〔緊ッ

※（前頁）四ニ述ベテアルコトハ充分御存知ノ方モ多イケレドモ，御存知デナイ方モアルト思ッテ，ワザワザ大要ヲ説明シテオキマス。

テキルノ原語ハ compact デス]

C ハ函数空間ニ於ケル最モ初等的ナ一例デアル。

$\boxed{2}$ 次ニ C ニ次イデ初等的ナ函数空間ノ一例ヲ述ベヨウ。

C ノ各函数ハ多角形函数デ近似(一様收斂ノ意味デ)出來タ。今度ハ<u>階段函数</u>デ一様ニ近似出來ルヤウナモノハ何デアラウカ?

階段函数トハ $a \leqq x \leqq b$ ヲ有限個ノ區間ニ分ケ、ソノ各區間デ常数ニ等シイヤウナ函数ヲイフ。

特ニソノ各区間が左端ニ於テ閉デテキル(左端ヲ含ム)トキニハ、右ニ連続ナ階段函数トイヒ、各區間が右端ニ於テ閉ヂテキルトキニハ左ニ連続ナ階段函数トイフ。

$1°$ 今 $a \leqq x \leqq b$ ノ各点 ξ ニ於テ

$$(1) \quad \lim_{x \to \xi - 0} f(x) = f(\xi - 0), \quad \lim_{x \to \xi + 0} f(x) = f(\xi + 0)$$

両方共有限確定デ且ツ

$$(2) \quad f(\xi + 0) = f(\xi)$$

ナル函数ノ全体ヲ D_+ トシ, (2) ノ代リニ

$$(2') \quad f(\xi - 0) = f(\xi)$$

ナル函数ノ全体ヲ D_- デ表ハス。

D_+ 或ハ D_- ニ於テハ, ソノ各要素(函数) $f(x)$ ノ norm $|f|$ ヲバ

$$|f| = \underset{a \leqq x \leqq b}{\text{上限}} \left[|f(x)| \right]$$

ニヨッテ定義スル。D_+, D_- ニ於ケル収斂ハ一様収斂ヲ意味スル。D_+, D_- ガ完全ナ距離空間ナルコトハ容易ニ証明出来ル。

D_+ ハ右ニ連続ナ階段函数ニヨリ一様ニ近似出来ル。又 D_- ハ左ニ連続ナ階段函数ニヨリ一様ニ近似出来ル。(証明容易，*Borel* ノ被覆定理應用)。

2° 次ニ D ノ内ニ於ケル緊集合 $\mathfrak{M}$ ノ條件ヲ考ヘヨウ。

今 $\mathfrak{M}=\{f(x)\}$ ガ $x=\xi$ ニ於テ右ニ同程度連続トハ，任意ノ正ノ數 ε ニ對シ

$$\xi<x,\ x'<\xi+\delta(\varepsilon)$$

ナラバ常ニ

$$|f(x)-f(x')|<\varepsilon$$

トナルヤウナ正ノ數 $\delta(\varepsilon)$ ガ存在スルコトヲイフ。(左ニ同程度連続モ同様ニ定義サレル)($x\neq\xi$, $x'\neq\xi$ ニ注目アレ、又 $\delta(\varepsilon)$ ハ ξ ニ関係スル)

$$D_+\supset\mathfrak{M}\quad(D_-\supset\mathfrak{M}\ ノ時モ同ジ)$$

ガ D_+ 内デ緊ッテヰルタメニハ，次ノコトガ必要且ツ充分デアル。

(イ) $\mathfrak{M}$ ガ一様ニ有界 [$\mathfrak{M}$ 全体デ $|f(x)|\leqq M$]

(ロ) $a\leqq x\leqq b$ ノ各点 ξ ニ於テ，$\mathfrak{M}$ ガ右及ビ左ニ同程度連続デアル。

必要ナルコトハ帰謬法ニヨル。充分ナルコトハ $\varepsilon_i\to 0$ (i 自然数) トシテ，各 ε_i ニツキ *Borel* ノ被覆定理ヲ應

用スレバ C ノ場合（Ascoli ノ定理）ト同様ニ証明出来ル。

尚 D_+ ガ Separable デナイコトハ

$$f_\xi(x)=\begin{cases}0 & a\leqq x<\xi\\ 1 & \xi\leqq x\leqq b\end{cases}$$

ダケヲ考ヘテ見レバ分ル（ξ ハ非可附番個存在スル）

3° 尚 D ニ於ケル vollstetig ナ linear operator［D 内ノ有界集合（$|f|\leqq M$ ナル f ノ全体）ヲ D 内ノ緊集合ニ移スヤウナ linear operator］Kf ハ次ノ性質ヲ有スル。

$\varepsilon>0$ ヲ任意ノ正ノ数トスルトキ

$$|Kf-K_\varepsilon f|\leqq\varepsilon|f|$$

$[|f|=\text{上限}\,|f(x)|]$

デ，且ツ

$$K_\varepsilon f=\sum_{i=1}^{k}c_i(f)\,\alpha_i(x)$$

$\alpha_i\in D$，$c_i(f)$ ハ f ノ linear fonctionell ナルヤウナ（k ハ有限ナル自然数）K_ε ガ存在スル。［132号雑記II参照］