590. 準単純りい群ニ関スル一定理

吉田　耕作（阪大）

§1. 複素数体ノ上ノ n 次行列ノ集合 $\overline{\mathfrak{T}}$ ガ Lie-ring デアルトスル。即チ

1° $X, Y \in \overline{\mathfrak{T}}$ ナラバ $\alpha X + \beta Y \in \overline{\mathfrak{T}}$ （α, β ハ実数）

2° X, Y ト共ニ $[X, Y] = XY - YX \in \overline{\mathfrak{T}}$.

今コノ ring（加法ハ行列加法，乗法ハ $[X, Y]$）ノ base（実係数デノ）ヲ $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_m$ トスル。

$$\exp.\left(\sum_{i=1}^{m} t_i X_i\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} t_i X_i\right)^k}{k!}$$

$$\left(t \text{ real 且 } \sum_{i=1}^{m} |t_i| < \varepsilon,\ \varepsilon > 0\right)$$

ナル形ノ行列ノ全体ヲ $\overline{\mathfrak{G}}$ トスレバ，Lie ノ第二基本定理ノ逆ニヨリ，$\overline{\mathfrak{G}}$ ハ Lie 群芽デアル。即チ $X, Y \in \overline{\mathfrak{G}}$ ガ充分

單位行列 E ＝ 近ケレバ（行列ノ topologie ハ絶体値 $\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|}=|A|,\ A=\|a_{ij}\|$ ＝ヨッテ定義スル）X^{-1} モ

XY モ $\overline{\mathfrak{G}}$ ＝屬スル。

楕テ $\mathfrak{G}$ ヲ以テ $\overline{\mathfrak{G}}$ カラ erzeugen サレタ行列ノ群（$\overline{\mathfrak{G}}$ ノ行列有限個ノ積及ビ斯カル積ノ極限ガ其ノ determinant $\neq 0$ ナルモノ全体ノ作ル群）ハ明＝ local compact ダカラ Lie 群ヲ作ル（本紙談話 337）。$\mathfrak{G}$ ノ Lie-ring $\mathfrak{T}$ ハ定義＝ヨッテ $\lim_{i\to\infty}((A_i-E)/\varepsilon_i)$ （$A_i\,(\neq E)\in\mathfrak{G}$, $\varepsilon_i\neq 0$ real 且ツ $A_i\to E$, $\varepsilon_i\to 0$）ノ如キ極限行列ノ全体ダカラ $\mathfrak{T}\supseteqq\overline{\mathfrak{T}}$。

先＝（本紙談話　　　）＝於テ例ヲ以テ一般＝ $\mathfrak{T}\neq\overline{\mathfrak{T}}$ ナルコトヲ示シ、且ツ $\overline{\mathfrak{T}}$ ガ irreducible ナラバ $\mathfrak{T}=\overline{\mathfrak{T}}$ ナルコトヲ証シタ。

コヽ＝ハ $\overline{\mathfrak{T}}$ ガ準單純ナラバ矢張リ $\mathfrak{T}=\overline{\mathfrak{T}}$ ノ成立スルコトヲ示シタイ。

$\overline{\mathfrak{T}}$ ガ準單純ト云フノハ $\overline{\mathfrak{T}}$ ガ nilpotent ナ Ideal ヲ含マナイコトデアリ、準單純ナ Lie-ring $\overline{\mathfrak{T}}$ ＝関シテ吾々ハ次ノ二ツノ基本定理ヲ有スル。

(i)　$\overline{\mathfrak{T}}$ ハ準單純＝シテ且ツ單純ナ Ideal ノ直和＝ナル（E. Cartan, Thèses, p. 53）

(ii)　$\overline{\mathfrak{T}}$ ハ完全可約デアル。即チ $\overline{\mathfrak{T}}$ ノ全ベテノ matrix X ハ

$$X = \left\| \begin{matrix} X^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X^{(2)} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & X^{(s)} \end{matrix} \right\|$$

ノ形デアルト考ヘテ差支ヘナイ。（斯ルモノニ相似——ähnlich）。コヽニ X ガ $\overline{\mathfrak{T}}$ ヲ動クトキ $X^{(t)}$ ハ $\overline{\mathfrak{T}}$ ニ準同型ナ，従ッテ準単純ナ，Lie-ring $\mathfrak{T}^{(t)}$ ヲ作リ且ツ $\mathfrak{T}^{(t)}$ ハ既約デアル。即チ $\mathfrak{T}^{(t)}$ ノ行列ハ全テ同時ニハ

$$\left\| \begin{matrix} A & 0 \\ X & B \end{matrix} \right\|$$

ノ形ノ行列ニ相似（ähnlich）ニハナラナイ（H. Weyl, Math. Zeitschr. 24, p.381）

§2. サテ上ノ proposition ヲ証明スルタメニ二ツノ Lemma ヲ要スル。

Lemma 1. $\overline{\mathfrak{T}}$ ハ $\mathfrak{T}$ ノ Ideal デアル（証明ハ談話571ト同様）

Lemma 2. $\mathfrak{T}$ ノ行列 Y ガ $\overline{\mathfrak{T}}$ ノ各行列ト可換ナラバ $Y=0$

証明. $\mathfrak{T}^{(t)}$ ハ準単純（上ノ(ii)ヲミヨ）ダカラ $\mathfrak{T}^{(t)}$ ノドノ行列ノ Spur（固有値ノ和）ハ 0 ニナル。何者、準単純ト云フコトカラ（(i)ニヨル）$\mathfrak{T}^{(t)}$ ノドノ行列モ $\mathfrak{T}^{(t)}$ カラ適当ニエランダ二ツノ行列 $X^{(t)}, Y^{(t)}$ ヲ以テ $[X^{(t)}, Y^{(t)}]$ ノ形ニ表ハサレネバナラヌコトガ分ルカラ。

故ニ行列ニ関スル公式 $\det(\exp.(A)) = \exp.(\mathrm{Spur}(A))$

ニヨリ $Y \in \mathfrak{T}$ ハ

$$\left\| \begin{matrix} Y^{(1)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Y^{(2)} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & Y^{(s)} \end{matrix} \right\|, \qquad Spur(Y^{(t)}) = 0$$

ノ形デナケレバナラヌコトガワカル。ココニ $Y^{(t)}$ ト $X^{(t)}$ ト Grad ヲ同ジクスル。

假定ニヨリ $Y^{(t)}$ ハ $\mathfrak{T}^{(t)}$ ヲ其ノ Lie-ring トスル Lie 群并 $\mathfrak{g}^{(t)}$ ト可換デアルガ，$\mathfrak{g}^{(t)}$ ハ $\mathfrak{T}^{(t)}$ ト共ニ既約ダカラ，Schur ノ Lemma ニヨリ，$Y^{(t)} = \alpha E^{(t)}$ （$E^{(t)}$ ハ $Y^{(t)}$ ト同ジ Grad ノ単位行列）。故ニ $Spur(Y^{(t)}) = 0$ カラ $Y^{(t)} = 0$。 即チ $Y = 0$　　　　以上，

§3. <u>証明.</u> $\overline{\mathfrak{T}} \neq \mathfrak{T}$ トシテ矛盾ヲ出ス。$\overline{\mathfrak{T}}$ 及ビ $\mathfrak{T}$ ノ Base ヲ各々 $(X_1, \cdots\cdots, X_m)$, $(X_1, \cdots\cdots, X_m, Y_1, \cdots\cdots, Y_k)$ トスル。$Y_1, \cdots\cdots, Y_k$ ノ任意ノ一ツヲ Y トスル。然ラバ $\overline{\mathfrak{T}}$ ガ $\mathfrak{T}$ ノ Ideal ト云フコトカラ $\mathfrak{T}_1 = (X_1, \cdots\cdots, X_m, Y)$ ガ Lie-ring デアリ $\overline{\mathfrak{T}}$ ハ $\mathfrak{T}_1$ ノ Ideal ニナル。$\mathfrak{T}_1$ ハ準単純デナイ。何者、若シ然ラズトスレバ (i) ニヨリ $\overline{\mathfrak{T}}$ ガ $\mathfrak{T}_1$ ノ直和項ニナリ從ッテ $Y' \equiv Y \pmod{\overline{\mathfrak{T}}}$ ノ形ノ $\mathfrak{T}$ ノ行列 Y' ガ $\overline{\mathfrak{T}}$ ノ各行列ト可換デナケレバナラナイ。之レハ Lemma 2 ニヨリ $Y' = 0$、即チ $Y \in \overline{\mathfrak{T}}$ ヲ意味スルカラ矛盾デアル。

サテ $\mathfrak{T}_1$ ガ準単純デナイカラ $\mathfrak{T}_1$ ハ nilpotent ナ Ideal $\mathfrak{R}_1$ ヲモツ。$\mathfrak{R}_1$ ハ準単純ナ $\overline{\mathfrak{T}}$ ノ Ideal デア

リ得ナイカラ適當ニ base ヲカヘレバ $\mathfrak{R}_1=(X_{l+1},\cdots\cdots,X_m,Y')$, $Y'\equiv Y\ (\mathrm{mod}\ \overline{\mathfrak{J}})$, $\overline{\mathfrak{J}}=(X_1,X_2,\cdots\cdots,X_m)$, $\mathfrak{J}_1=(X_1,\cdots\cdots,X_m,Y')=(X_1,\cdots,X_m,Y)$ ト假定シテ差支ヘナイ。

若シ $l+1\leqq m$ ナラバ, $\overline{\mathfrak{J}}_1=(X_{l+1},\cdots\cdots,X_m)\neq 0$ ガ $\overline{\mathfrak{J}}$ ノ Ideal デアル。($\overline{\mathfrak{J}}$, $\mathfrak{R}_1$ ガ $\mathfrak{J}$ ノ ideal ダカラ). $\overline{\mathfrak{J}}_1$ ハ $\overline{\mathfrak{J}}_1$ ト共ニ nilpotent ダカラ $\overline{\mathfrak{J}}$ ノ準單純性ト $\overline{\mathfrak{J}}_1\neq 0$ トハ反スル。ヨッテ $l+1>m$ 即チ $\mathfrak{R}_1=(Y')$ デナケレバナラナイ。

然ラバ, $\mathfrak{R}_1$, $\overline{\mathfrak{J}}$ ガ $\mathfrak{J}_1$ ノ ideal ダカラ, 任意ノ $X\in\overline{\mathfrak{J}}$ ニ對シテ

$$[X,Y']\in(\mathfrak{R}_1\ ト\ \overline{\mathfrak{J}}\ トノ\ \text{Durchschnitt})$$

トナラナケレバナラナイ。即チ $[X,Y']=0$。ヨッテ Lemma 2 ニヨリ $Y'=0$。之レハ $Y\in\overline{\mathfrak{J}}$ ヲ意味スルカラ, $Y_1,Y_2,\cdots\cdots Y_k$ ガ $\overline{\mathfrak{J}}$ トー次独立ト云フコトニ反スル。

故ニ $\overline{\mathfrak{J}}=\mathfrak{J}$ デナケレバナラナイ。 以上

§4. 應用. 連結シタ準單純 Lie 群 $\mathfrak{G}_1$ ノ行列ニヨル連続表現 $\mathfrak{G}_2$ ヲ考ヘレバ, 連続写像 $\mathfrak{G}_1\longrightarrow\mathfrak{G}_2$ ハ実ハ Gebietstreu (開集合ノ像ガ開集合ニナル) ナ寫像ニナル。何者, コノ準同型寫像 $\mathfrak{G}_1\longrightarrow\mathfrak{G}_2$ ハ所謂 infinitesimal representation ヲ induce シ, コノトキ $\mathfrak{G}_1$ ノ Lie-ring ニ對應スル Lie-ring ハ準單純トナルカラデアル。

同様ノ議論ハ(前談話 571)ニヨレバ $\mathfrak{G}_1$ ガ連結

Lie 群デ $\mathfrak{g}_2$ ガ $\mathfrak{g}_1$ ノ連續ナ既約表現ノトキニモ出來ルワケデアル。

§5. 以上ハ，数物年會ニ御報告スル積リデ、先般阪大數學教室ノ方々ニ談話會デ聴イテ頂イタ内容デアリマス。其ノ後 Cartan ノ Thèses ヲ引繰リ返シテ居リマシタラ 113 頁ニ。

準單純ナ Lie-ring ノ各 Operator ト可換ナ Operator Nuloperator デアル。

ト出テ居リマス。之レニヨレバ Lemma 2 ハ $Y \in \mathfrak{T}$ ト云フ假定ナシニ成立スル筈ニナリマスが，$\bar{\mathfrak{T}}$ トシテ Spur 0 ナ n 次行列ノ全体ヲトレバ明ニ準單純且ツ E ハ $\bar{\mathfrak{T}}$ ノ各行列ト可換ニナリマスカラ，Cartan ノ結果ハ誤ッテヲリマス。昔流ノ大ザッパナ例ノ勘定法が誤ッテルノデセウ。之ニツイテハ又何レ談話サセテ頂キタイト思ヒマス。