587. 雜記 II

南雲　道夫（阪大）

§ Fredholm ノ積分方程式ニ就テ

☐1 Fredholm ノ積分方程式

$$(1)\quad \varphi(x)+\int K(x,y)\varphi(y)\,dy=f(x)$$

ニ對スル Fredholm ノ行列式ニヨル解法ハ，形式ガ重ス

ギテ，理論上カラモ應用上カラモアマリ有難クナイ。之レニ代ル種々ナ方法ガ古クカラ研究サレテヰル。ソノ中デ自分ニ便利ト思ハレルノハ，分解セル核

$$\mathrm{K}_n(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x)\,\beta_i(y)$$

ニヨッテ $\mathrm{K}(x, y)$ ニ近似サセル方法デアル。

1° 核ガ特ニ上ノ如ク分解セル時ニハ

$$\varphi(x) = f(x) - \sum_{i=1}^{n} \xi_i\,\alpha_i(x)$$

トオクコトニヨリ，積分方程式ハ（α_i, β_i イヅレモ一次的ニ独立）

$$\xi_i + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\,\xi_j = f_i \qquad (i = 1, \cdots\cdots, n)$$

$\left[c_{ij} = \int \alpha_j\,\beta_i\,dx, \quad f_i = \int f\beta_i\,dx\right]$ ナル聯立一次方程式ニ帰着スル。

2° (1) ヲ *linear Operator* ノ記号デ示セバ

$$(\mathbb{1} + \mathrm{K})\,\varphi(x) = f(x)$$

ソコデ今 $\mathrm{K}_n(x, y)$ ヲ充分 $\mathrm{K}(x, y)$ ニ近クトリ，

$$\mathrm{K}(x, y) - \mathrm{K}_n(x, y) = \Delta(x, y)$$

トオキ，$\Delta(x, y)$ ノ *Resolvente* ヲ $R(x, y)$ トスレバ［*Neumann* 級数ニヨリ］，

$$(\mathbb{1} + \Delta)^{-1} = \mathbb{1} + \mathrm{R} = \mathbb{1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \Delta^\nu.$$

故ニ $\quad (\mathbb{1}+\mathrm{R})(\mathbb{1}+\mathbb{K})\varphi=(\mathbb{1}+\mathrm{R})f=g.$

$$(\mathbb{1}+\mathrm{R})(\mathbb{1}+\mathbb{K})=(\mathbb{1}+\mathrm{R})(\mathbb{1}+\Delta+\mathbb{K}_n)$$
$$=\mathbb{1}+(\mathbb{K}_n+\mathrm{R}\mathbb{K}_n)=\mathbb{1}+\mathbb{A}_n.$$

A_n ハ分解セル核トナルカラ問題ハ $1°$ ニ帰着シタ。

3° 以上ノ計算（$1°$, 及ビ $2°$）ヲ詳シク辿レバ Fredholm ノ第一，第二，第三定理ガ得ラレル。即チ $1°, 2°$ ヲ合セテ計算スレバ (1) ノ Resolvent ト Transponierte Gleichung（$\mathbb{K}(x,y)$ デ x, y ヲ交換シタ方程式）トノ関係ガ得ラレル。

尚 (1) ガ Parameter λ ヲ含ンダ形

$$\varphi(x)+\lambda\int\mathbb{K}(x,y)\,\varphi(y)\,dy=f(x)$$

ノ時ニハ、ソノ Resolvente ガ λ ノ有理型函数（meromorphe Funktion）トナルコトモ上ノ方法カラ容易ニ分ル。

$|\lambda|\leqq\Lambda$ ノ時 $\|\Delta\|<\dfrac{1}{\Lambda}$ $(\|\Delta\|=Max|\Delta(x,y)|)$ ニトレバ $\mathrm{R}(\lambda)$ ハ $|\lambda|<\Lambda$ デ正則，故ニ $A_n(\lambda)$ モ正則。従ツテ $A_n(\lambda)$ ノ Resolvente ハ $|\lambda|<\Lambda$ デ有理型。故ニ $\mathbb{K}$ ノ Resolvente ガ有理型．Λ ハ任意ニ大キク出来ルカラ結論ガ出ル。

$\boxed{2}$ 以上ハ皆古ク E. Schmidt ガ Math. Ann. 64.（1907）ニ於イテ論ジタモノニスギナイ。（Resolvente ガ有理型ニナルコトハ書イテナイガ）。

次ニ上ノ考ヘヲ抽象化シテ線状距離空間(B)*ニ於ケル方程式

$$\mathfrak{x}+\mathbb{K}\mathfrak{x}=\mathfrak{y}$$

ヲ考ヘヨウ。 此ノ考ヘ方ハ已ニ1918年ニ F. Riesz ガ Acta Math. 41 (71頁—98頁)ニ発表シタモノデアル。

彼ニヨレバ $\mathbb{K}$ ガ vollstetiger linearer Operator ナラバ、スベテ Fredholm ノ積分方程式ト同様ノ結論ガ得ラレル。

$\mathbb{K}$ ガ Vollstetiger linearer Operator トハ、$|\mathfrak{x}|\leqq 1$ ナル $\mathfrak{x}$ ノ全体ガ $\mathbb{K}$ ニヨリ(B)内ノ緊ッタ集合(kompakte Menge)** ニ変換サレルヤウナ linearer Operator ナルコトヲイフ。

---

* 要素ノ一次結合(Vektor ト同様)ガ定義サレ、各要素ニハソノ絶対値(Norm) $|\mathfrak{x}|$ ガ定義サレタ集合(空間)デ、且ツ完全性(Cauchy ノ収斂條件成立)ヲ有スルモノ。例ヘバ $a\leqq x\leqq b$ ニ於ケル連続函数ヲ要素トシ、ソノ全体カラ成ル集合ヲ C トシ、$|f|=\underset{a\leq x\leq b}{Max}\{|f(x)|\}$ トスレバ、C ハ(B)空間デアル。

** $\mathfrak{M}$ ガ(B)内デ緊ッテヰルトハ、$\mathfrak{M}$ ノ任意ノ無限部分集合ガ必ズ(B)内ニ集積点ヲ有スルコトデアル。例ヘバ特ニ(B)ガ有限次元ノ空間ナル場合ニハ $\mathfrak{M}$ ガ(B)デ緊ッテヰルコトト $\mathfrak{M}$ ガ有界ナルコトトハ同等デアル。シカシ(B)ガ無限次元ノ時ニハ有界ダケデハ緊ッタ集合ニハナラナイ。

Fredholm ノ積分方程式ノ場合ニハ $|\varphi(x)|\leqq 1$ ナルコトカラ，$\mathbb{K}\varphi$ ハ一様ニ有界且ツ同程度連続トナリ，*Ascoli-Arzela* ノ定理ニヨリ，之レハ緊ツタ集合ヲ作ル（但シ C 空間トシテ）。

故ニ $\mathbb{K}$ ハ *vollstetiger linearer Operator* デアル。

所ガ *F. Riesz* ノ理論ハ易シイケレドモ初等的デハナイ。今假リニ $\mathbb{K}$ ガ次ノ性質ヲ有スルモノトスレバ，万事ガ $\boxed{\text{I}}$ ト同様ナ方法デ証明出来ル。即チ "任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シテ

$$|\mathbb{K}\psi-\mathbb{K}_\varepsilon\psi|\leqq\varepsilon|\psi|$$

且ツ $y=\mathbb{K}_\varepsilon\psi$，$[\psi\in(B)]$ ノ張ル空間ハ<u>有限次元</u>デアル。" ヤウナ <u>*linearer*</u> *Operator* $\mathbb{K}_\varepsilon$ ガ存在スル。

從ツテ此処ニ次ノ問題ヲ生ズル。

$\mathbb{K}$ ガ *vollstetiger linearer Operator* ナラバ，上ノヨウナ $\mathbb{K}_\varepsilon$ ガ存在スルデアラウカ？

之レハ私ニハ未ダ解決出来ナイ。識者ノ御助力ヲ仰グ所以デアル。特ニ C 空間（脚註＊）ノ場合ニハ，$\mathbb{K}\varphi$ ハ同程度連続デアルカラ，$a\leqq x\leqq b$ ヲ n 等分シ，ソノ分点デ $\mathbb{K}\varphi$ ニ一致スルヤウナ頂点ヲ有スル多角形函数デオキカヘレバヨイ。（n 充分大）

又 L^2 或ハ *Hilbert* 空間ノ場合ニハ $\mathbb{K}\varphi$ ヲ有限次元ノ線状空間デ近似サセ，之ヘノ *Projection* ヲトレ

バヨイ。