586. Kolmogoroff ノ論文紹介, I

小松 醇郎 (阪大)

上ベッチ群及ビ環ニ關スル Kolmogoroff ノ論文ハ最近度々發表サレ，ソノ一部ヲ日本數學物理學會誌第11巻第1号ニ紹介シマシタ、然シ紹介シタ *Les groupes de Betti des espaces localement bicompakt* (C. R. t. 202) ニハ吉田，角谷君ノ御話ノ通リ Kolmogoroff ノ書キ誤リガアル様デス。

ソレ故此處デソノ点ヲ訂正シ[1]且ツ *Propriétés des groupes de Betti des espaces localement bicompacts* (C. R. t. 202) ヲ紹介シ定理ノ証明ヲ試ミテ見マス。尚又數物會誌ニ紹介シタ Alexander ノ第一ノ環[2]ニ就テノ結果[3]ヲ紹介シマス。

I

Ⓐ R : espace de Hausdorff localement bicompact

Ⓗ : groupe abélien bicompakt

J : groupe discrete abélien

---

1) Ⓑ ノ 4).

2) On the Ring of a Compact Metric Space, Proc. Nat. Acad. U.S.A. Vol. 21.

3) A. Kolmogoroff; Homologiering des Komplexes und des lokal-bicompakten Raumes. Recueil Mathématique t. 1 : 5.

r次元代數複体$\bar{\varphi}^r$ノ定義：

1) $\bar{\varphi}^r(\mathcal{E}_0, \cdots\cdots, \mathcal{E}_r)$ハRノ中デbicompakt ナ(r+1)個ノ任意ノ部分集合系$\mathcal{E}_0, \cdots\cdots, \mathcal{E}_r$ニ對シ一意ニ決定サレル。

2) $\bar{\varphi}^r$ノ値ハⒽノ元。

3) $\bar{\varphi}^r$ハArguments凡テニ對シAlternée.

4) $\bar{\varphi}^r$ハArguments凡テニ就テadditive, 即チ

$$\bar{\varphi}^r(\mathcal{E}_0, \cdots\cdots, \mathcal{E}_i' + \mathcal{E}_i'', \cdots\cdots, \mathcal{E}_r) = \bar{\varphi}^r(\mathcal{E}_0, \cdots, \mathcal{E}_i', \cdots, \mathcal{E}_r) + \bar{\varphi}^r(\mathcal{E}_0, \cdots, \mathcal{E}_i'', \cdots\cdots, \mathcal{E}_r).$$

以上ノ複体$\bar{\varphi}^r$ノ集合ハ一ツノアーベル群$\bar{\Phi}^r$.

$\bar{\Phi}^r$ノ中デ次ノ條件5)ヲ充ス複体φ^rハ部分群Φ^rヲ作ル。

5) $\varphi^r(\mathcal{E}_0, \cdots\cdots, \mathcal{E}_r) = 0$. (Ⓗノ0元),

$$\text{si} \quad \overline{\mathcal{E}}_0 \cdot \cdots\cdots \cdot \overline{\mathcal{E}}_r = 0.$$

下境界(frontier)トシテノOperator $g_u \Phi^r \subset \Phi^{r-1}$.

$$g_u \varphi^r \equiv \varphi^{r-1}(\mathcal{E}_0, \cdots, \mathcal{E}_{r-1}) = \varphi^r(G, \mathcal{E}_0, \cdots, \mathcal{E}_{r-1}),$$

茲ニ$G \supset \overline{\mathcal{E}}_0 + \overline{\mathcal{E}}_1 + \cdots\cdots + \overline{\mathcal{E}_{r-1}}$, bicompact, ouvert.[1]

$g_u \varphi^r = 0$ナル輪体(cycle) φ^rノ集合ガ作ル群Z^r.

$g_u \varphi^{r+1} = \varphi^r$ナル境界$\varphi^r$ノ集合ガ作ル群$\Gamma^r$.

<u>下ベッチ群</u>[2] $B_u^r(R, Ⓗ) = Z^r - \Gamma^r$,

---

1) Rノlocally bicompactノ條件ハ此処ニ必要。

2) Topologieノ導入ハ數物會誌ノ通リ。

Ⓑ n次元代數複体$\overline{f}^n$ノ定義：

1) $\overline{f}^n(P_0, \text{------}, P_n)$ハ$R$ノ任意ノ$(n+1)$個ノ点ニ對シ一意ニ定マル。

2) $\overline{f}^n(P_0, \text{------}, P_n)$ノ値ハ群$J$ノ元。

3) $\overline{f}^n$ハソノ arguments 凡テニ對シ alternée.

4) 各$\overline{f}^n$ニ對シ有限個ノ bicompact[1], disjoint ナ部分集合。

系　$S_{\overline{f}^n}$ガ一ツ存在シ次ノ條件ヲ充ス。

a) $\overline{f}^n(P_0, \text{------}, P_n) = \overline{f}^n(P_0', \text{------}, P_n')$, 茲ニ$P_i$ト$P_i'$トハ$S_{\overline{f}^n}$ノ同一ノ élément ニ含マレルトキ。

b) $\overline{f}^n(P_0, \text{------}, P_n) = 0$（$J$ノ0元）, 茲ニ$P_i$ノ中ノ少クモドレカ一点ガ$R - S_{\overline{f}^n}$ニ含マレルトキ。

以上ノ複体$\overline{f}^n$全体ガアーベル群$\overline{F}^n$[2].

$\overline{F}^n$ノ中デ次ノ條件5)ヲ充ス複体$\overline{f}^n$ハ zéro ニ équivalent ト言ヒ部分群$\overline{O}^n$ヲ作ル。

5) Rノ凡テノ点pニ對シ一ツノ近傍$V(p)$ガ定マリ凡テノ$P_i \in V(p)$ナラバ$\overline{f}^n(P_0, \text{----}, P_n) = 0$.

---

1) 集合自身ハ ouvert デモ宜シ、férmeture ヲトレバ bicompact ニナルモノ, ソノ際 disjoint デナクナルコトモ可能。

2) $\overline{f}_1^n + \overline{f}_2^n$ノ$S_{\overline{f}_1^n + \overline{f}_2^n}$ハ$S_{\overline{f}_1^n}$, $S_{\overline{f}_2^n}$ノ éléments 相互ノ Durchschnitt 及ビ差デ作ラルル部分集合系.

$F^r = \bar{F}^r \cdots\cdots \bar{0}^r$ ナル群ニ operator g_0.

$$g_0 f^r = f^{r+1}(P_0, \cdots\cdots, P_{r+1})$$

$$= \sum_{i=0}^{r+1} (-1)^i f^r(P_0, \cdots\cdots, P_{i-1}, P_{i+1}, \cdots\cdots, P_{r+1}).$$

上ベッチ群 $B_0^r(R, J) = Z_0^r - H_0^r$.[1]

II

定理 Ⓗ ト J トヲ互ヒニ Charakter group ニナルヤウニトレバ $B_0^r(R, J)$ ト $B_u^r(R, Ⓗ)$ トハ又互ヒニ Charakter group トナル。

証明 $\bar{f}^r \times \bar{\varphi}^r = \sum \bar{f}^r(P_{i_0}, \cdots\cdots, P_{i_r}) \times \bar{\varphi}^r(M_{i_0}, \cdots\cdots, M_{i_r})$.

茲ニ $M_1, \cdots\cdots, M_n$ ハ $S_{\bar{f}^r}$. P_i ハ M_i ニ含マルル任意ノ点; $(i_0, \cdots\cdots i_r)$ ハ $1, \cdots\cdots, n$ ノ内カラ任意 $(r+1)$ 個.

$\bar{f}_1^r, \bar{f}_2^r$,

$$S_{\bar{f}_1^r} = \{M_1, \cdots\cdots, M_n\}$$

$$S_{\bar{f}_2^r} = \{N_1, \cdots\cdots, N_p\}.$$

$$S_{\bar{f}_1^r + \bar{f}_2^r} = \{D_i, D_j, C_{ij}\} \begin{matrix} (i = 1, 2, \cdots\cdots, n) \\ (j = 1, 2, \cdots\cdots, p) \end{matrix}$$

茲ニ $C_{ij} = M_i \cdot N_j$; $D_i = M_i - \sum_j C_{ij}$; $D_j = N_j - \sum_i C_{ij}$

---

1) $g_0 g_0 f^r = 0^{r+2}$, $g_0 f^r = 0^{r+1}$ ナル f^r が作ル群 Z_0^r, $g_0 f^{r-1} = f^r$ ナル f^r ノ作ル群 H_0^r.

$$(\bar{f}_1^n+\bar{f}_2^n)\times\bar{\varphi}^n=\sum_S(\bar{f}_1^n+\bar{f}_2^n)(q_{i_0},\text{------},q_{i_n})$$

$$\times\bar{\varphi}^n(Q_{i_0},\text{-------},Q_{i_n}).$$

但シ $Q_i\subset S_{\bar{f}_1^n+\bar{f}_2^n}$.

$$=\sum_S\bar{f}_1^n(q_{i_0},\text{------},q_{i_n})\times\bar{\varphi}^n(Q_{i_0},\text{----},Q_{i_n})$$

$$+\sum_S\bar{f}_2^n(q_{i_0},\text{----},q_{i_n})\times\bar{\varphi}^n(Q_{i_0},\text{------},Q_{i_n})$$

$$=\sum_{S_{\bar{f}_1^n}}\bar{f}_1^n(P_{i_0},\text{------},P_{i_n})\times\bar{\varphi}^n(M_{i_0},\text{------},M_{i_n})$$

$$+\sum_{S_{\bar{f}_2^n}}\bar{f}_2^n(P_{i_0},\text{-----},P_{i_n})\times\bar{\varphi}^n(N_{i_0},\text{-----},N_{i_n})$$

$$=\bar{f}_1^n\times\bar{\varphi}^n+\bar{f}_2^n\times\bar{\varphi}^n.$$

即チ $\bar{\varphi}^n$ ハ群 $\bar{F}^n$ ヲ *real member mod. 1* ノ群 K＝ *homomorph* ＝ *abbilden* スル。逆＝ $\bar{F}^n$ ノ K ヘノ一ツノ *homomorph.* ノ *abbildung* π 任意＝與ヘルトキソレヲ與ヘルヤウナ複体 $\bar{\varphi}^n$ 唯一ツ存在ス、何トナレバ

$S_{\bar{f}_1^n}$ ト等シイ *Mengensystem* ヲ持ツ複体 $\bar{f}^n$ ノミ考ヘレバ $\bar{F}^n$ ノ一ツノ部分群 $\bar{F}^n(S_{\bar{f}_1^n})$ ヲ作リ丁度 $(n-1)$ 次元單体上ノ n 次元複体ノ群ト *isomorph.*

丁度 $\bar{F}^n(S_{\bar{f}_1^n})\xrightarrow{\pi}K$ ヲ與ヘル双對ノ複体群ガ單体上デ考ヘラル。即チ $\binom{n}{n+1}$ 個ノ $(n+1)$ 次元單体ヲ *Argument* トスル函数値ガ定マル。ソノ値ヲボムル $\bar{\varphi}^n$ ハトルトスレバ

良イ、斯クテ凡ベテノ複体 $\bar{f}_i^r$ ノ $S_{\bar{f}_i^r}$ ニツキ $\bar{\varphi}^r(N_{i_0},\cdots\cdots$
$\cdots\cdots, N_{i_r})$ ノ値が定マル。

函數 $\bar{\varphi}^r$ が *bicompact* ノ集合 $(\mathcal{E}_0,\cdots\cdots,\mathcal{E}_r)$ ニ對シトル値ヲ强制的ニ定メタがソレハ條件 1)——4) ヲ充シテ居ル。*Additive* ナルコトハ

$$S_{\bar{f}_1^r}=\{M_0+M_0', M_1,\cdots\cdots,M_r\},\quad S_{\bar{f}_2^r}=\{M_0',\cdots\cdots,M_r\}$$

$$\pi\bar{f}_1^r=\bar{f}_1^r(P_0,\cdots\cdots,P_r)\times\bar{\varphi}^r(M_0+M_0',\cdots\cdots,M_r)=\bar{f}_1^r\times\alpha,$$

$$\pi\bar{f}_2^r=\bar{f}_2^r(P_0',\cdots\cdots,P_r)\times\bar{\varphi}^r(M_0',\cdots\cdots,M_r)=\bar{f}_2^r\times\beta,$$

$$\begin{aligned}\pi(\bar{f}_1^r-\bar{f}_2^r)&=(\bar{f}_1^r-\bar{f}_2^r)(q_0,P_1,\cdots\cdots,P_r)\times\bar{\varphi}^r(M_0,\cdots\cdots,M_r)\\&\quad+(\bar{f}_1^r-\bar{f}_2^r)(P_0',\cdots\cdots,P_r)\times\bar{\varphi}^r(M_0',\cdots\cdots,M_r)\\&=\bar{f}_1^r\times\bar{\varphi}^r(M_0,\cdots\cdots,M_r)+\{\bar{f}_1^r(P_0',P_1,\cdots,P_r)-\bar{f}_2^r(P_0',\cdots,P_r)\}\\&\qquad\times\bar{\varphi}^r(M_0',\cdots\cdots,M_r)\\&=\bar{f}_1^r\times x+\bar{f}_1^r\times\beta-\bar{f}_2^r\times\beta.\end{aligned}$$

Homomorphismus ヨリ

$$\pi(\bar{f}_1^r-\bar{f}_2^r)=\bar{f}_1^r\times\alpha-\bar{f}_2^r\times\beta.$$

$$\therefore\quad \bar{f}_1^r\times x=\bar{f}_1^r\times\alpha-\bar{f}_1^r\times\beta=\bar{f}_1^r\times(\alpha-\beta).$$

$\bar{f}_1^r=\bar{f}_1^r(P_0,\cdots\cdots,P_r)$ ハ任意ノ J ノ元ヲトルヲ得。同一ノ α,β（Ⓗ ノ元）が成立スルノダカラ

$$x=\alpha-\beta.$$

$$\therefore\quad \bar{\varphi}^r(M_0+M_0', M_1,\cdots\cdots,M_r)=\bar{\varphi}^r(M_0,\cdots\cdots,M_r)+\bar{\varphi}^r(M_0',\cdots\cdots,M_r).$$

$F^r\longrightarrow 0$ ニ移ス $\bar{\varphi}^r$ ハ、皆 0 ナル値ヲトル函數ナルコト明

ナル故ニ

$$\overline{F}^r \text{ ト } \overline{\Phi}^r \text{ トハ互ヒニ Charaktergroup.}$$[1]

<u>部分群 $\overline{O}^r$ ト $\overline{\Phi}^r$ トハ Annulator.</u>

$$\bar{f}^r_1 \in \overline{O}^r, \quad S_{\bar{f}_1^r}$$

$$\bar{f}_1^r \times \varphi^r = \sum_{S_{\bar{f}_1^r}} \bar{f}_1^r(P_{i_0}, \cdots\cdots, P_{i_r}) \times \varphi^r(M_{i_0}, \cdots\cdots, M_{i_r})$$

$$\overline{M_{i_0}} \cdot \cdots\cdots \cdot \overline{M_{i_r}} = 0 \text{ ナラ } \varphi^r = 0, \quad \overline{M}_{i_0} \cdot \cdots\cdots \cdot \overline{M}_{i_r} \supset p$$

ナラバ

$$\varphi^r \neq 0, \text{ 然シ } \bar{f}_1^r(P_{i_0}, \cdots\cdots, P_{i_r}) = 0$$

$$(P_i \subset V(p), \quad P_i \subset M_i).$$

$$\therefore \quad \bar{f}_1^r \times \varphi^r = 0$$

逆ニ $\bar{\varphi}^r \in \overline{\Phi}^r$ ナラ $\overline{M}_0 \cdot \cdots\cdots \cdot \overline{M}_r = 0$ 且ツ

$$\bar{\varphi}^r(M_0, \cdots\cdots, M_r) \neq 0.$$

故ニ $S_{\bar{f}_1^r} = \{M_0, \cdots\cdots, M_r\}$, $\bar{f}_1^r \in \overline{O}^r$ ナル $\bar{f}_1^r$ ヲトレバ

$$\bar{f}_1^r \times \bar{\varphi}^r \neq 0.$$

以上ニヨリ <u>$\overline{F}^r - \overline{O}^r = F^r$ ト $\overline{\Phi}^r$ トハ互ヒニ Charaktergroup.</u>

次ニ $f^r \times g_u \varphi^{r+1} = g_0 f^r \times \varphi^{r+1}$ [2]

---

1) $\overline{\Phi}^r \to K$ ハ stetig homomorph デアル。

2) A. Kolmogoroff; Über die Dualität im Aufbau der kombinatorischen Topologie. Recueil Mathématique t. 1. (97–102) ト同様。

故ニ $B_u^{\,r}(R,\textcircled{H})$ ト $B_0^{\,r}(R,J)$ トハ Charakter-group.

III

補助定理. 單体 x^s デーツノ上輪体 Z_0^r ($r \leqq s$) ハ 0-homolog Null 即チ x^s デ $g_0 f^{r-1} = Z_0^r$ ナル如キ $(r-1)$ 次元複体ガ存在ス。

證明. x^s デ一点 p ヲトリ x^s ノ凡ベテノ x^{r-1} ニ就キ

$$\begin{cases} f^{r-1}(x^{r-1}) = Z^r(+p\cdot x^{r-1}), & x^{r-1} \text{ ガ点 } p \text{ ヲ含マヌトキ} \\ f^{r-1}(x^{r-1}) = 0. & x^{r-1} \text{ ガ点 } p \text{ ヲ含ムトキ.} \end{cases}$$

ト定メル. 任意ノ x^r ガ点 p ヲ含マナイナラバ

$$(g_0 f^{r-1})(x^r) = (-1)^i f^{r-1}(x_i^{\,r-1})^{1)}$$
$$= (-1)^i Z^r(+p\cdot x_i^{\,r-1})$$

假定ヨリ

$$g_0 Z^r(p\cdot x^r) = (-1)^{i+1} Z^r(+p\cdot x_i^{\,r-1}) + Z^r(x^r) = 0$$
$$\therefore\ g_0 f^{r-1} = Z^r(x^r).$$

Alexander ノ第一ノ Homologiering ハ是ヲ使ヘバ trivial ニナル、即チ

$$(f^r\cdot f^s) = f^{r+s+1}(x^{r+s+1})$$
$$= \frac{1}{2}\sum f^r(x^r)\, f^s(x^s).$$

茲ニ x^{r+s+1} ハ fremd ナ單体 x^r ト x^s トガ張ル單体; 和ハ x^{r+s+1} ヲ斯様ナ r 次元單体ト s 次元單体トノ張ル形ニ分ケラレル

---

1) $x^r = (a_0, \text{-----}, a_i, \text{------} a_r)$ トスレバ

$x_i^{\,r-1} = (a_0, \text{------}, a_{i-1}, a_{i+1}, \text{------}, a_r)$

凡エル場合ニ付キ加エル。

$$u_0^{r+s+1}=(z_0^r\cdot z_0^s)=0.$$

何トナレバ任意ノ x^{r+s+1} ニテ

$$\begin{aligned} u^{r+s+1}(x^{r+s+1}) &= \frac{1}{2}\sum z_0^r(x^r)\cdot z_0^s(x^s) \\ &= e^0 f^{r-1}\cdot e^0 f^{s-1} \\ &= \pm e^0 e^0 f^{r-1} f^{s-1} = 0^{1)} \end{aligned}$$

各 x^{r+s+1} ニテ u^{r+s+1} ノ値ハ 0.

---

1) $g_0 f^{r-1}=e^0 f^{r-1}$, e^0 ハ $e^0(+p)=1$, $e^0(-p)=-1$ ナル 0 次元複体.

群ノ元トシテデナク単ニ値ノ計算ノタメニ f^{r-1}, f^{s-1} ヲ持ッテ来タ.