582. 複素変數ノ函數ガ正則ナルタメノ條件

清水　辰次郎（阪大）

實変數 x ノ函數 $f(x)$ ガ $a \leqq x \leqq b$ ニテ無限回微分可能ナルトキ $a \leqq x \leqq b$ ニテ $|f^{(n)}(x)| \leqq A_n$ トオケバ，$f(x)$ ガ $a < x < b$ ニテ解析函數ナルタメノ必要ニシテ充分ナル條件ハ，η, K ヲ正數トスルトキ $A_n < \eta n! K^n$ ナルコトデアルハ解析學ノ書物（例ヘバ藤原氏．解析學第一巻）ニアルコトデアルガ，此ヲ複素変數 z ノ函數 $f(z)$ ニ關シテハ其ノ儘ハアテハマラナイ。何者．$f(z)$ ハ Cauchy-Goursat ノ定理ニヨリ或ル領域ニテ $f'(z)$ ノ存在カラ $f(z)$ ノ解析函數ナルコトガ結論セラレルカラデアル。然シ次ノ如ク少シク変形スレバ兎モ角定理ノ形ニハナル。

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

トオクトキ，$u(x, y)$，$v(x, y)$ ガ一点 z_0 ノ或近傍 U_{z_0} ニテ無限回偏微分可能デアリ且ツ z_0 ニテ $f^{(n)}(z_0)$ (註)，$n=1, 2, \ldots\ldots$，ガ存在スルトス。シカルトキ $f(z)$ ガソノ近傍ニテ解析函數ナルタメノ必要且充分ナル條件ハ

(註) 上述ノ假定ノ下ニ z_0 ニヲイテ $f(z)$ ノ rectilinear n-th derivative $\dfrac{d^n f}{dz^n_\theta}$ ガ存在スルコトガワカルガ，$\dfrac{d^n f}{dz^n_\theta}$ ガ θ ニ無關係ニ定ルトキ，之レヲ z_0 ニヲケル微分ト云ヒ $f^{(n)}(z_0)$ デ表ハスコトニスル。

U_{z_0} ニテ

$$\left|\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-j}\partial y^j}\right|<A_{n-j,j},\quad\left|\frac{\partial^n v}{\partial x^{n-j}\partial y^j}\right|<B_{n-j,j},\quad j=0,1,\cdots\cdots,n$$

トオクトキ或整数 η, K ニ對シ

$$A_{n-j,j}<\eta n!K^n,\quad B_{n-j,j}<\eta n!K^n$$

ガ成立スルコトデアル。

此ノ定理ニテ $f^{(n)}(z_0)$ ノ存在ヤ u, v ノ偏微分可能性ハ $f(z)$ ガ解析函數ナラバ必要ナルコト明カデアルカラ $f(z)$ ガ或ル点 z_0 ノ近傍ニテ正則ナルタメノ必要且充分ナル條件トシテ上ノ假定ヲ述ベルコトモデキル。

證明ハ簡單デ先ヅ必要ナルコトハ z_0 ヲ中心トシ U_{z_0} ニ含マレル充分小サナ円 Γ ソノ半徑ヲ d トシソノ円周上ノ $|f(z)|$ ノ最大値ヲ G, 若ヘル円内部ノ点ヲ z トシ z ト円周トノ最短距離ヲ δ トスレバ Cauchy ノ積分表示

$$\frac{f^{(n)}(z)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\,d\xi$$

ヨリ

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!}\leqq\frac{dG}{\delta^{n+1}}$$

正則性ヨリ

$$f^{(n)}(z)=\frac{1}{i^j}\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-j}\partial y^j}+i\frac{\partial^n v}{\partial x^{n-j}\partial y^j}\right)$$

依ツテ

$$\frac{A_{n-j,j}}{n!} \leqq \frac{dG}{\delta^{n+1}}, \quad \frac{B_{n-j,j}}{n!} \leqq \frac{dG}{\delta^{n+1}}$$

逆ニ充分ナルコトハ z_0 ニテ微分 $f^{(n)}(z_0)$ が存在スルカラ

$$\frac{|f^{n}(z_0)|}{n!} \leqq \frac{\left|\left(\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right)_{x_0}\right| + \left|\left(\frac{\partial^n v}{\partial x^n}\right)_{x_0}\right|}{n!} < 2\eta K^n;$$

$$z_0 = x_0 + i y_0$$

依ツテ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(z - z_0)^n$$

ハ z_0 ヲ中心トスル充分小ナル円内部ニテ収斂シーツノ正則函数 $g(z)$ ヲ表ハシ, $g^{(n)}(z_0) = f^{(n)}(z_0)$ $n = 0, 1, 2,$ ………。

即チ $\quad g(z) = u^*(x, y) + i v^*(x, y)$

トスルトキ

$$\left(\frac{\partial^n u^*}{\partial x^{n-j} \partial y^j}\right)_{x_0, y_0} = \left(\frac{\partial^n u}{\partial x^{n-j} \partial y^j}\right)_{x_0, y_0}$$

$$\left(\frac{\partial^n v^*}{\partial x^{n-j} \partial y^j}\right)_{x_0, y_0} = \left(\frac{\partial^n v}{\partial x^{n-j} \partial y^j}\right)_{x_0, y_0}$$

$$\begin{pmatrix} n = 1, 2, \cdots\cdots, \\ j = 0, 1, \cdots\cdots n \end{pmatrix}$$

然ルニ $A_{n-j,j}$, $B_{n-j,j}$ ニ関スル仮定カラ

$$\sqrt[n]{A_{n-j,j}}, \quad \sqrt[n]{B_{n-j,j}}$$

ハ共ニ nL ヨリ小トナル。ココニ L ハ或ル正数ヲ表ハス。
依ッテ

$$\sum_{n} \frac{1}{\sqrt[n]{A_{n-j,j}}}, \quad \sum_{n} \frac{1}{\sqrt[n]{B_{n-j,j}}} \qquad j=0,1,2,\cdots\cdots n$$

ハ悉ク発散スル。

Carleman, Denjoy 等ノ quasi-analytic function ノ理論カラ u, v ガ夫々一点ニ於ケル微分係数ガ悉ク与ヘラレレバ偏微分可能ナル函数ハ上ノ條件ヲ満足スレバ u, v ガ夫々唯一ツニ決定セラレル（Gevrey; Comptes rendus, Paris 177）コトカラ上ノ如キ u, v 従ッテ $f(z)$ ハ唯一ツシカ存在シ得ズ $g(z)$ ト一致スルコトガワカル。

従ッテ $f(z)$ ハ z_0 ノ近傍ニテ解析函数ヲ表ハス。