576. 代數的分岐点ヲ有セザル Riemann 面ノ解析的表現

早田　文一

(I) 解析的數式ヲ作ルコト

Parabolischer Typus ノ Riemann 面ダケヲ問題トスル。代數的分岐点ヲ有セザル Riemann 面 F = x 平面ノ有限部分ヲ寫像スル解析函數ヲ $f(x)$ トスル。$f(x)$ ハ mehrfache Stelle ヲ持タナイノデアルカラ、ソレニ由來スル Anzahlfunktion $N_1(r)$ ハ恒等的ニ 0 デナケレバナラナイ。

(1)　$N_1(r) = 2N(r, f) - N(r, f') + N\left(r, \frac{1}{f'}\right) = 0$

$2N(r, f) - N(r, f')$ ハ極ニ由來スル項デアルカラ、コレヲ 0 ナラシムル爲メニ先ヅ

(I)　$f(x)$ ノ極ヲ $a_1, a_2, \text{-------}$ トスレバ、コレ等ハ何レモ一位ノ極。

トイフ必要條件ガ出ル。次ニ (1) 式ノ終リノ項 $N\left(r, \frac{1}{f'}\right)$ ヲ 0 ナラシムルタメニ

(II)　$f'(x)$ ハ零点ヲ持タヌ。即チ $\frac{1}{f'(x)}$ ハ整函數デナケレバナラヌ。

今

$$\frac{1}{f'(x)} = g(x)$$

ト置ケバ

$$f(x) = \int^x \frac{dt}{g(t)}$$

積分ノ出発点ハ $g(x)$ ノ零点以外ノ適當ナ点デアル。$g(x)$ ハ（I），（II）ノ條件ヨリ $a_1, a_2, \cdots\cdots$ ニ於イテノミ零点ヲ有シ且ツコレ等ハ何レモ二位ノ零点デアルコトガワカル。ヨッテ

$$g(x)=\{g_1(x)\}^2$$

ト置ケバ、$g_1(x)$ ハ整函数デ $a_1, a_2, \cdots\cdots$ ニ於テ一位ノ零点ヲ有スル。ヨッテ一先ヅ次ノ結果ニナル。

<u>punktierte Ebene ($x \neq \infty$) ヲ f 平面上ノ代数的分岐点ヲ有セザル Riemann 面ニ一對一ニ等角寫像スル有理型函ハ次ノ形ヲ有スル。</u>

$$f(x)=\int^x \frac{dt}{\{g(t)\}^2}$$

コヽニ $g(x)$ ハ次ノ性質ヲ有スル。

i) $g(x)$ ハ整函数

ii) ソノ零点ハスベテ一位ナリ。

iii) $\{g(x)\}^{-2}$ ノ極ノ近傍ニ於ケル Laurent 展開ノ留数ハスベテ 0 ナリ。　　（逆モ勿論成立スル）

次ニ三ツノ條件ヲ形ヲ変更スル。$g(x)$ ノ一ツノ零点ヲ a トスレバソノ近傍ノ Taylor 展開ハ

$$g(x)=g'(a)(x-a)+\frac{1}{2}g''(a)(x-a)^2+\cdots\cdots$$

但シ ii) ノ條件ニヨリ $g'(a)\neq 0$ デナケレバナラヌ。コレヨリ

$$\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{g'(a)(x-a)}\left\{1-\frac{g''(a)}{2g'(a)}(x-a)+\cdots\cdots\right\}$$

$$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}^2=\frac{1}{g'(a)^2(x-a)^2}\left\{1-\frac{g''(a)}{g'(a)}(x-a)+\cdots\cdots\right\}$$

$$=\frac{1}{g'(a)^2(x-a)^2}-\frac{g''(a)}{g'(a)^3(x-a)}+\text{正}(x-a)$$

故ニ

$$g''(a)=0$$

即チ、$g(x)$ハソノ零点ニ於テ、ソノ第二次導函数ガ必ズ0トナルヤウナ整函数デアル。ヨッテ$g''(x)/g(x)$ナル商ヲ作ッテ見ルト、$g(x)$ノ零点ニ於テハ、零点ガ一位デアル故ニ一定ノ値ヲ有スル。即チ商ハx平面ノ全有限部分デ有限ナ数値ヲ有スル故ニ整函数デナケレバナラナイ。コレヲ$P(x)$トスレバ

$$(2)\qquad \frac{d^2g}{dx^2}=P(x)\cdot g$$

即チ上述ノ三ツノ性質ヲ具備シテヰル解析函数ハ(2)ノ形ノ微分方程式ニ於イテ$P(x)$ニ適当ナ整函数ヲ入レタ場合ノ微分方程式ノ解ニナッテヰルワケデアル。

又逆ニ斯様ナ微分方程式ノ解ハ常ニ上ノ三ツノ性質ヲ持ッテヰル。ソレガ整函数デアルコトハ微分方程式ノ形ヨリ容易ニワカル。零点ノ一位デアルコトハ *linear, homogen* ナ二次微分方程式ノ解ノ一般的性質デアル。零点ノ近傍ニ於ケル$\{g(x)\}^{-2}$ノ *Laurent* 展開デ留数ガ0ニナルコトモ亦明カデアル。従ッテ$P(x)$ニ勝手ナ整函数ヲ入レタトキ(2)ノ解$g(x)$ヲ以テ$f(x)$ヲツクレバコノ *Riemann* 面ハ代

數的分岐点ヲ有セザルモノデアル。

(II) 微分方程式ノ二三ノ性質

微分方程式

$$\frac{d^2 g}{dx^2}=P(x)\cdot g \qquad P(x)\text{；整函數}$$

i) *Fundamentallösungen* ヲ形成スル二ツノ解 $g_1(x)$ ト $g_2(x)$ トハ共通根ヲ持タナイ。

何トナレバ C_1, C_2 ヲ共＝0デナイ常數トシテ

$$g(x)=C_1 g_1(x)+C_2 g_2(x)$$

ナル解ヲ作ル。$g_1(a)=0$　$g_2(a)=0$ デアレバ勿論

$$g(a)=C_1 g_1(a)+C_2 g_2(a)=0$$

次＝ $g_1'(a)\neq 0$, $g_2'(a)\neq 0$ デアルカラ

$$g_1'(a)=C_1 g_1(a)+C_2 g_2'(a)=0$$

トナルヤウ＝ C_1, C_2 ガエラベル。$g(x)$ ハ $x=a$ ヲ少クモ二位ノ零点＝持ツコトトナラカラ、ソレハ恒等的＝0デナケレバナラヌ。　$C_1=C_2=0$（矛盾）

ii) $g_1(x)$, $g_2(x)$ ハ同一ノ x ＝對シテソレラノ對数的導函數ガ等シクナルコトハナイ。

何トナレバ同時＝0デナイ様ナ $C_1 C_2$ ＝對シテ

$$g(a)=C_1 g_1(a)+C_2 g_2(a)=0$$

$$g'(a)=C_1 g_1'(a)+C_2 g_2'(a)=0$$

トナルヤウナ a ガ存在シテハナラナイ。

依ッテ

$$\begin{vmatrix} g_1(a) & g_2(a) \\ g_1'(a) & g_2'(a) \end{vmatrix} = g_1(a)\,g_2'(a) - g_1'(a)\,g_2(a)$$

$$= g_1(a)\,g_2(a)\left\{\frac{g_2'(a)}{g_2(a)} - \frac{g_1'(a)}{g_1(a)}\right\} \neq 0$$

即チ $g_1(x)$, $g_2(x)$ ノ零点以外ノ x デハ

$$\frac{g_1'(x)}{g_1(x)} \neq \frac{g_2'(x)}{g_2(x)}$$

iii) $P(x)$ ガ m 次ノ有理整函数ナルトキ $g(x)$ ハ階数 $\frac{m+2}{2}$ ナル有限階超越整函数ニナル。コレニ関シテハ Einar Hille ノ研究ニヨリ詳シク知レテキル。

iv) $P(x)$ ガ超越整函数ナルトキ $g(x)$ ハ無限階超越整函数ニナル。コレハ iii) ノ結果ニ於テ $m\to\infty$ ナラシムレバ、$g(x)$ ノ階数モ亦 ∞ ニ近ヅクコトヨリ容易ニ想像サレルコトデアルガ、次ノ様ニシテ厳密ニ証明スルコトガ出来ル。
全有限平面デ有理型デアル函数ノ對数的導函数ノ Schmiegungsfunktion ニ関スル定理ヲ使フ。

今斯様ナ函數ヲ一般ニ $f(x)$ トスルト若シ $f(x)$ ガ有限階ノ函數ナルトキハ

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = O(\log r)$$

ヨツテ $g(x)$ ヲ微分方程式ヲ満足スル有限階函數トスレバ $g(x)$ ト同時ニ $g'(x)$ モ亦有限階デアルカラ

$$m\left(r, \frac{g'}{g}\right) = O(\log r)$$

$$m\left(r, \frac{g''}{g'}\right) = O(\log r)$$

$\dfrac{g''}{g} = \dfrac{g'}{g} \cdot \dfrac{g''}{g'}$ デアルカラ

$$m\left(r, \frac{g''}{g}\right) \leqq m\left(r, \frac{g'}{g}\right) + m\left(r, \frac{g''}{g'}\right) = O(\log r)$$

$P(x)$ ハ整函數デアルカラ

$$T(r, P) = m(r, P) = m\left(r, \frac{g''}{g}\right) \leqq O(\log r)$$

故ニ適當ナ常數 k ニ對シテ

$$\varliminf_{r\to\infty} \frac{T(r, P)}{\log r} < k$$

コレハ $P(x)$ ガ有理函數、コノデハ特ニ有理整函數ガアルコトヲ示ス。故ニ $P(x)$ ヲ超越整函數トスレバ $g(x)$ ハ無限階整函數デナケレバナラナイ。

(III) *Defekt* ノ問題

(I) デ問題トシタ函數 $f(x)$ デハ常ニ $N_1(r) = 0$ デアルカラ、ソレニ就イテハ第二定理 (2. *Hauptsatz*) ハ次ノ様ニナル。

$$(3) \qquad \sum_{\nu=1}^{q} m(r, a_\nu) < 2T(r) + S(r)$$

斯様ナ函數ニツイテハスベテノ *defekte Werte* ニワタル *Defekt* ノ和 $\sum_{\nu=1}^{q} \delta(a_\nu)$ ガ最大値 2 ニ達スルコトガ $N_1(r) \neq 0$ ナル函數

ヨリモ多ク期待セラレル。周知ノ實例

$$f(x)=\int_0^x e^{-t^q}dt$$

デハ $f=\infty$ ト スベテノ有限ナ zielwert ニワタルdefekt ノ和ハ實際2ニナル。コノ函數ハ階数 q デアルガ $g(x)=e^{\frac{1}{2}x^q}$ デアルカラ

$$P(x)=\frac{q(q-1)}{2}x^{q-2}+\frac{q^2}{4}x^{2q-2} \quad (2q-2\text{次})$$

即チ $f(x)=\int_0^x e^{-t^q}dt$ ハ $P(x)$ ヲ上ノ様ニトツタトキノ微分方程式ノ解 $g(x)=e^{\frac{1}{2}x^q}$ ヨリ作ラレ、ソノ gesamtdefekt 丁度2ニナツテヰル。

第二定理(3)ハ defekte Werte ノ數ガ可附番無限マデ多クアルコトヲ許スノデアルガ、コノ實例ハ未ダ一ツモ知ラレテ井ナイ。

既ニ Literatur ニ見エル實例

$$(4)\qquad f(x)=\int_0^x e^{e^t}dt$$

デハ正ノ defekt ヲ有スル値ハ $f=\infty$ レツデアルカラ gesamtdefekt ハ1デアツテ2ニ達シナイ。コノ例デハ

$$g(x)=e^{-\frac{1}{2}e^x}$$

$$P(x)=\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{2}e^x$$

Picard ノ除外値ノ概念ハ Borel ノ除外値ノ概念ニ拡張セラレ、コレハ更ニ Nevanlinna ノ defekter Wert

ナル概念ニ拡張セラレタノデアルガ、除外値ノ知ラレテヰル實例ハ何レモソレラヲ有限個シカ持ッテヰナイ。即チ第二定理ニ関シテハ実例ヨリモ理論ノ方ガ遙ニ進ンデヰルト見ルコトが出來ル。

無數ニ多ク除外値（defekter Wert）ノアル實例ヲ作ルコトハ現今一般ニムツカシイト信ゼラレテヰル。unangreifbar beim gegenwärtigen stande der Wissenschaft ト云フ程デハナクトモ困難ニ相違ナイ。然シ乍ラ defekter Wert ハ Umkehrfunktion ノ direkt kritische Singularität デアルトイフ予想（Nevanlinna-Ullrich）ヲ正シイトスレバ、コレト ahlfors ノ定理（階數 ρ ナル全有限平面ニ於テ有理型ナル函數ノ Umkehrfunktion ノ direkt transzendente Stelle ノ數ハ 2ρ ヲ超ヘナイ）トカラ defekte Werte ヲ無數ニ持ツ函數ハ無限階デナケレバナラナイ。

而シテ gesamtdefekt ガ 2 デアレバスベテノ Stelle ノ Verzweigungsindex ガ 0 デアルカラ $N_1(r)=0$ ナル函數デナケレバナラナイ[2)]。コレヨリ以上ノ様ナ性質ヲ有スル函數 $f(x)$ ハ $P(x)$ ヲ超越整函數トシタトキノ微分方程式ノ解 $g(x)$ ヨリ作ラレル筈デアルトイフコトが出來ル。

但シ、ソレハ単ニ存在スル関連性ヲ意味スルダケデ實際コノ方法デ出來ネバナラヌト云フノデハナイ。コノ方法デウマク行クタメニハ微分方程式ノ積分（$P(x)$ ガ超越函數ナル場合ノ）ヤ無限階函數ニ関スル知識ノ増大ガ先決問題デア

ル。

註1) $f(x)=\int^{x}\frac{dt}{\{g(t)\}^2}$ ノ Schwarz ノ導函數ヲ作ッテ見ルト

$$\frac{f'''(x)}{f'(x)}-\frac{3}{2}\left\{\frac{f''(x)}{f'(x)}\right\}^2=-2\frac{g''(x)}{g(x)}=-2P(x)$$

トナル。

註2) Verzweigungsindex ハ Charakteristik $T(r)$ ヲ單位トシテ量ルノデアルカラ V. Index ガ 0 トナルタメニ必ズシモ $N_1(r)=0$ ナルヲ要シナイノデアルガ $N_1(r)=0$ ナルトキ最モ大キナ確率ヲ以ッテ gesamtdefekt ガ 2 トナルコトガ期待サレル。然シナガラ $f(x)=\int_0^{x}e^{e^t}dt$ ナルヤウナ例モアルカラ絶對的ニハ期待出來ナイ。$P(x)$ ヲ原点ニ対シテ非對稱性ノモットタイ整函數ニエラバナケレバナラナイ。