572. 線狀函數方程式ニ就イテ(IV)

北川　敏男(阪大)

1. (I)―(III) ニ於イテ、若干ノ *spectral properties* ヲ具ヘタ基本作用素 $\mathfrak{D}$ ガ與ヘラレテキルトシ、コレト或ル意味デ可換ナル作用素 Γ ニ關シ函數方程式

(1)　$\Gamma f(x) = 0 \qquad (x \in X)$

ヲ考ヘテ來タ。$\mathfrak{D}$ 及ビ Γ ニ色々ナ條件ヲ附加スルコトニヨリ、線狀移動可能函數方程式即チ $\mathfrak{D}$ ガ微分演算デアリ從ッテ Γ ハ *linear translatable operator* デアルトコロノ (1) ノ特別ノ場合ニ於イテヨク知ラレタ基本定理ノ拡張ガ得ラレルコトガ分ッタ[1]。ソノ間ノ類似ハ顯著デアル。ソコデ、何故コウシタ *parallelism* ガ成立スルカトイフソノ根據ヲ知リタイ。

---

(1)　勿論吾々ハ何時マデモ *parallelism* ニ滿足スベキデハナイ。シカシ、第一段階トシテソレヲナサネバナラナイデアラウ。

次ニ問題ノ *Formulation* カラ明ラカデアルヤウニ，作用素ノ可換環ト密接ナ関係ガアル。[2] ソコデ今マデ知ラレテ井ルソレノ理論ト如何ナル関聯ニアルカガ問題ニナル。ソレラニ就テ少シ述ベテ見タイ。

2. Volterra-Pérès ノ Composition[3]

$$(2)\qquad \overset{*}{F}\overset{*}{G}=\int_{x}^{y}F(x,t)\,G(t,y)\,dt$$

ニ於テ今與ヘラレタ一定ノ $F(x,y)$ ガ $0\leqq x\leqq y\leqq a$ デ定義サレテ "forme cononique" デアル[4]トスル。$G(x,y)$[5] ガコノ $F(x,y)$ ト可換デアルトスル。即チ $\overset{*}{F}\overset{*}{G}=\overset{*}{G}\overset{*}{F}$ ナリトスルト

$$(3)\qquad G(x,y)=\lambda(y-x)+\int_{0}^{y-x}\lambda(\xi)\,\Phi(\xi;x,y)\,d\xi$$

---

(2) Γ_1, Γ_2 ガ夫々𝔖ト可換ナルトキ，ソレラ同志デ又可換ナルコトニハ勿論イロイロノ條件ヲ要スル。最初カラ考ヘテ井ル函数集合 (A), (B), (C) ニ依存シテノ話ニナルカラソレハ相當ニムツカシイデアロウト思ハレル。

(3) Volterra-Pérès, Leçons sur la composition et les fonction permutables. コレヲ以下 [C] デ示ス。

(4) [C] p.37 ヲミラレヨ。$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$ ガ存在シテ連續且ツ

$$F(x,x)=1,\quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{y=x}=\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{y=x}=0$$

トナッテキルコトデアル。

(5) $G(x,y)$ ハ (x,y) ニ關シテ連續。([C] p.39)

ナル関係ヲミタス $\lambda(\xi)$, Φ ガ存在スル。コヽニ Φ ハ F カラ決定サレル。

$\lambda(\xi)$ ハ $G(x,y)$ ニノミ depend スル。(3) ヲ $\Omega(\lambda)$ デ表ハス。[6] 又任意ノ連続函数 $\lambda(\xi)$ ニ對シテ (3) ハ F ト permutable ナ作用素ヲアタヘル。[7] コヽニ

(i) 変換 Ω ハ composition ヲ conserve スル。

$$\Omega^*(\lambda)\,\Omega^*(\mu) = \Omega(\overset{*}{\lambda}\,\overset{*}{\mu}) \tag{4}$$

デアル。コノコトカラ次ノ事ヲシル。

(ii) $F(x,y)$ ト permutable ナ $G_1(x,y)$, $G_2(x,y)$ ハ相互ニ permutable デアル。従ッテ可換環ヲツクル。[8]

今、コノ可換環ニツイテ、(I)—(III) ノ Formulation ヲ當テハメテ見ル。コレガコノ談話ノ目的デアル。

3. $1^{*n} = \dfrac{(y-x)^n}{n!}$ デアル。コレヲ、x ヲ始点, y ヲ変数トシテ考ヘルトキ $\left\{\dfrac{(y-x)^n}{n!}\right\}$ ハ次ノ性質ヲモツ:

$$\frac{d}{dy}\left\{\frac{(y-x)^n}{n!}\right\} = \frac{(y-x)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

コノ性質ニ着眼シテ $\left\{\overset{*}{F}{}^{n+1}(x,y)\right\}$ ナル函數系列ニ於テコレ

---

(6) 〔C〕 p. 42 及ビ p. 56。

(7) 式 (3) ヲ Pérès ノ変換トイフ。〔C〕 p. 65.

(8) $G(x,y)$ ハ (x,y) ニ関シテ連続トシタ。$F(x,y)$ ト可換ナルカヽル G ノ全体ハ可換環デアル。然ルニ、色々ナ問題ヲ解ク必要上, $G(x,y)$ ヲ (x,y) ニ関シテ連続トスルト、狭スギル。ソコデコノ環ノ拡張 (Topological ナ) ガ重要ナ問題デアル。

ヲ x ヲ始点，y ヲ変数トシタトキ

$$(5)\qquad \mathcal{D}_y\left[\overset{*}{F}^{n+1}(x,y)\right]=\overset{*}{F}^{n}(x,y)$$

トナルヤウナ linear operation ヲ求メテミル。$\mathcal{D}_y$ ヲ次ノ如ク定義スル。

定義1. $G(x,y)$ ヲ $F(x,y)$ ト可換ナリトスル。(3) ニヨツテ $G(x,y)$ ニ對應スル λ ガ微分可能デアルトスル。然ルトキ $\mathcal{D}_y\{G(x,y)\}$ ハ存在シ，次ノ式デ與ヘラレル：

$$(6)\qquad \mathcal{D}_y\{G(x,y)\}\equiv\mathcal{D}_y\,\Omega(\lambda)\equiv\Omega\left(\frac{d\lambda}{d\xi}\right)$$

然ルトキ次ノ事柄ハ容易ニ得ラレル：

定理1. 任意ノ x,y ($0\leqq x\leqq y\leqq a$) ニ對シテ

$$(7)\qquad \mathcal{D}_y\left\{\overset{*}{F}^{n+1}(x,y)\right\}=\overset{*}{F}^{n}(x,y)^{(9)}\qquad (n=0,1,2,\ldots\ldots)$$

定理2. 級數

$$(8)\qquad j_\lambda(x,y)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\overset{*}{F}^{n+1}(x,y)$$

ニヨツテ定義サレル函數ハタシカニ存在シ[10]，λ ノ整函數デア

(9) 証明容易。

(10) $\left|\overset{*}{F}^{n+1}(x,y)\right|\leqq\frac{|y-x|^n}{n!}\left\{1+\frac{M\theta|y-x|}{n}\right\}$ ナル關係式ガ幅ヲ利カス。コレハ[C] p.67ニ與ヘラレテヰル。尚(7)及ビコノ評価カラ、$\left\{\overset{*}{F}^{n+1}(x,y)\right\}$ ハ点 x ニ adjoint シタ y ノ函数トミルトキ、吾々ガ(III)ニ於テ述ベタトコロノ Sheffer ノ函数系トミラレルコトヲ注意スル。

リ、任意ノ λ ニツイテ

(9) $\quad \mathcal{D}_y\{j_\lambda(x,y)\} = \lambda j_\lambda(x,y)$

次ニ各 t $(0 \leqq t \leqq a)$ ニ對シテコレヲ座トシテノ三ツノ函數集合 (A_F^t), (B_F^t) 及ビ (C_F^t) ヲ定義スル：

定義2.

(10)
1° (A_F^t) ハ考フル可換環全体。

2° (B_F^t) ハ (A_F^t) ニ属シ $\mathcal{D}_y\{G(x,y)\}$ ガ(定義1ニヨツテ與ヘラレルモノノ全体。

3° (C_F^t) ハ (B_F^t) ニ属シ、考ヘル点 x ニテ $G(x,x)=0$ トナツテヰル $G(x,y)$ ノ全体。

(3)ニヨリ $\lambda(\xi)$ $(0 \leqq \xi \leqq a)$ ト $G(x,y)$ $(0 \leqq x \leqq y \leqq a)$ トガ一對一ニ對應シテヰルコトニ注意スル。

定理3. 線狀作用素 $\mathcal{D}$ ハ (A_F^t), (B_F^t), (C_F^t) ニ於テ、次ノ如ク *spectral properties* ニ関シテ二ツノ單一性ヲ有スル：

〔I〕 $G(x,y) \in (B_F^t)$ ニシテ且ツ $\mathcal{D}_y\{G(x,y)\} = \lambda G(x,y)$ ヲ満足スルモノハ $k j_\lambda(x,y)$ (k = 常數) ニ限ル。

〔II〕 $G(x,y) \in (A_F^t)$ ヲ任意ニ與ヘルトキ

(11) $\quad \mathcal{D}_y\{H(x,y)\} = \lambda H(x,y) + G(x,y)$

ヲ満足スル $H(x,y)$ ハ (C_F^t) ニ於イテ一ツ而シテ唯一ツ存在スル。

ソコデ

定義3. (11)ニ於ケル $H(x,y)$ ヲバ $\mathcal{L}_{\lambda t}[G(x,y)]$ デ

表ハス。

以上ニヨリ、Volterra-Pérès ノ可換環ノ理論ヲ(I)—(III) ノ方式ニ入レルコトハ出来タト思フ。

4. 以上考ヘタハ，所謂 order 1 ノ核 $F(x, y)$ ニ就イテデアル、一般ノ場合即チ order $n(>1)$ ノトキニハ，以上ノヤウナ事柄ガソウ容易ニハ行カナイヤウデアル。