571. Lie ノ第二基本定理ニ関聯シタ一ツノ問題

吉田　耕作（阪大）

複素數体ノ上ノ n 次ノ行列 $A=\|a_{ij}\|$ ノ作ル ring ヲ R トスル。

絶對値 $|A|=\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2}$ ニヨツテ R ニ topology ガ導入サレル。R ノ部分集合 $\mathfrak{G}$ ガ matrix 乘法ニ對シテ群ヲ作ルトキ，$\mathfrak{G}$ ハ上ノ topology ニヨツテ topological group ニナル。$\mathfrak{G}$ ガ次ノ條件ヲ滿足スルトキニ Lie 群ト呼ブコトニスル。

1)　實數ヲ係數トシテ一次独立ナ $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_m (\in R)$ ガ存在シ

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{m} t_i X_i\right) \in \mathfrak{G}, \quad t \text{ real}$$

2)　充分小サナ正數 ε ヲトレバ，$|A-E| \leqq \varepsilon$.（E ハ R ノ單位行列），$A \in \mathfrak{G}$ ナル A ハ uniquely ニ

$$A=\exp\left(\sum_{i=1}^{m} t_i X_i\right), \quad t \text{ real}.$$

ト表ハサレル。

但シ　$\exp(X)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{X^i}{i!}$

然ラバ $\mathfrak{G}$ ガ Lie 群ナルタメノ必充條件ハ $\mathfrak{G}$ ガ locally compact ナコトデアル。（本紙談話　　参照，但シ discrete group ヲモ Lie 群ト呼ブコトニスル）

$\mathfrak{G}$ ガ Lie 群ナラバ，$\sum_{i=1}^{m} t_i X_i$，t real，ナル形ノ element 全体 $\mathfrak{J}$ ハ次ノ條件ヲ満足スル。

(α) $\mathfrak{J}$ ハ real linear space デ有限ナ base (with real coefficients) ヲ有スル。即チ $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_m$。

(β) $[X, Y] = XY - YX$ ハ X, Y ト共ニ $\mathfrak{J}$ ニ属スル。

此ノ $\mathfrak{J}$ ヲ Lie 群 $\mathfrak{G}$ ノ <u>Lie ring</u> ト呼ブ。二ツノ ring operations ハ vector-addition ト commutator-multiplication $[X, Y]$ デアル。$\mathfrak{J}$ ハ $\lim_{i\to\infty}((A_i - E)/\varepsilon_i)$ ($A_i \in \mathfrak{G}$，ε_i real 且ツ $A_i \neq E$，$\varepsilon_i \neq 0$，$\lim_{i\to\infty} A_i = E$，$\lim_{i\to\infty} \varepsilon_i = 0$) ニ依ツテ定義サルル如キ <u>$\mathfrak{G}$ ノ E ニ於ケル微分商</u>ノ集合デアル（本紙談話　　　）。

今逆ニ (α) 及ビ (β) ヲ満足スル R ノ subset $\mathfrak{J}$ ガ apriori ニ與ヘラレタトキ

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{m} t_i X_i\right) \left(t \text{ real 且 } \sum_{i=1}^{m} |t_i| < \varepsilon,\ \varepsilon > 0\right)$$

ナル形ノ R ノ element 全体ノ集合ヲ $\overline{\mathfrak{G}}$ トスレバ $\overline{\mathfrak{G}}$ ハ所謂 <u>Lie 群芽</u>デアル。即チ $X, Y \in \overline{\mathfrak{G}}$ ガ充分 E ニ近ケレバ X^{-1} 及ビ $XY \in \overline{\mathfrak{G}}$。

<u>之レガ Lie ノ第二基本定理デアル</u>。ソコデ $\overline{\mathfrak{G}}$ ノ要素有限個ノ積及ビ斯ル積ノ limes（但シ non-singular

ナモノトミル）全体 $\widetilde{\mathfrak{G}}$ ヲ考ヘルト，明＝ $\widetilde{\mathfrak{G}}$ ハ locally compact ＝ナルカラ Lie 群デアル。$\widetilde{\mathfrak{G}}$ ノ Lie ring ヲ $\widetilde{\mathfrak{I}}$ トスレバ $\widetilde{\mathfrak{I}} \supseteqq \overline{\mathfrak{I}}$ デアル。然シ $\widetilde{\mathfrak{I}} = \overline{\mathfrak{I}}$ ＝ナルカドウカハワカラナイ。実際 $\widetilde{\mathfrak{I}}$ ガ $\overline{\mathfrak{I}}$ ヨリモ大キクナル example トシテ

$$\overline{\mathfrak{I}} \text{ ノ base} = \begin{Vmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \tau\sqrt{-1} \end{Vmatrix}, \quad \tau \text{ irrational}$$

ガ掲ゲラレル。故＝

Lie 群芽 $\overline{\mathfrak{G}}$ ハ Lie 群 $\widetilde{\mathfrak{G}}$ ノ單位要素 E ノ近傍＝ハナラナイ。

ヨッテ $\overline{\mathfrak{I}} = \widetilde{\mathfrak{I}}$ トナルタメノ條件ヲ求メルコトガ問題＝ナル。上＝見タ如ク，classical ナ Lie ノ理論デハ之レ＝答ヘテハヲラナイノデアル。本談話＝於テハ次ノ定理ヲ述ベタイ。

定理．$\overline{\mathfrak{I}}$ ガ irreducible ナラバ Lie 群芽 $\overline{\mathfrak{G}}$ ハ Lie 群 $\widetilde{\mathfrak{G}}$ ノ單位ノ近傍＝ナル。

コヽ＝ $\overline{\mathfrak{I}}$ ガ irreducible ト云フノハ $\overline{\mathfrak{I}}$ ノ要素ガ全テ同時＝ハ

$$\begin{Vmatrix} A & 0 \\ * & B \end{Vmatrix}$$

ノ形＝ハ transform デキナイコトヲ云フノデアル。以下其ノ証明。

Lemma 1. $\overline{\mathfrak{G}}$ ハ $\widetilde{\mathfrak{G}}$ ノ Lie 不変部分群芽デアル。即チ任意ノ $B \in \widetilde{\mathfrak{G}}$ ＝對シテ $A \in \overline{\mathfrak{G}}$ ガ充分E＝近ケレバ

$$BAB^{-1} \in \overline{\mathfrak{g}}$$

証明. $A = \exp(X)$, $X \in \overline{\mathfrak{J}}$ トスレバ $BAB^{-1} = \exp(BXB^{-1})$ デアリ X ト共ニ BXB^{-1} ハ 0 ニ収斂スルカラ

$$X \text{ ト共ニ } BXB^{-1} \in \overline{\mathfrak{J}}$$

ガ証明サレレバヨイ。所ガ之レハ $B \in \overline{\mathfrak{g}}$ ノトキハ明カデアル。何者，コノトキハ変換 $X \to BXB^{-1}$ ハ $\overline{\mathfrak{g}}$ ノ linear adjoint Lie 群芽デ induzieren サレルカラ。$B \in \widetilde{\mathfrak{g}}$ ナル一般ノ場合ハコノ special case カラ limit process ニヨツテ得ラレル。

Lemma 2. (E. Cartan ノ定理――例ヘバ H. Freudenthal, Ann. of Math. 37, 1936, p. 64―ヲ見ラレタシ)。$\widetilde{\mathfrak{g}}$ ハ irreducible ナ Lie 群デアルカ $\widetilde{\mathfrak{g}}$ ノ単位ノ近傍ハ semi-simple ナ Lie 群芽 $\overline{\mathfrak{g}}_1$ ト可換ナ Lie 群芽 $\overline{\mathfrak{g}}_2$ トノ直積ニナル。コヽニ $\overline{\mathfrak{g}}_1$ ノ行列ハ全テ determinant 1 又 $\overline{\mathfrak{g}}_2$ ノ行列ハ全テ αE (α 複素数) ノ形デアル。

Lemma 2'. $\overline{\mathfrak{J}}$ ガ irreducible ナルノミナラズ $\mathrm{trace}(X) = 0$, $X \in \overline{\mathfrak{J}}$ ナラバ $\widetilde{\mathfrak{g}}$ ハ semi-simple ナ Lie 群デアル。

証明. コノトキ $\overline{\mathfrak{g}}$ 従ツテ $\widetilde{\mathfrak{g}}$ ノ行列ハ全テ determinant 1 ニナル(良ク知ラレタ公式 $\det(\exp(X)) = \exp(\mathrm{trace}(X))$ ニヨレ)。

上ノ條件 $\mathrm{trace}(X) = 0$, $X \in \overline{\mathfrak{J}}$ ハ $\overline{\mathfrak{J}}$ ガ semi-simple ナ ring ナラ確ニ満足サレル。何者、semi-simple ナ

Lie ring $\overline{\mathfrak{J}}$ ハソノ commutatorring ト一致スル。即チ $\overline{\mathfrak{J}}$ ノ任意ノ element ハ $[X, Y]$, X 及ビ $Y \in \overline{\mathfrak{J}}$, ノ形ニ表ハサレルカラ（例ヘバ H. Freudenthal, 前出参照）。

<u>定理ノ証明</u>. Lemma 1 ニヨレバ $\overline{\mathfrak{J}}$ ハ $\widehat{\mathfrak{J}}$ ノ ideal デアル。即チ $X \in \overline{\mathfrak{J}}$, $Y \in \widehat{\mathfrak{J}}$ ナラバ $[X,Y] \in \overline{\mathfrak{J}}$. 先ヅ $\overline{\mathfrak{J}}$ ハ $\widehat{\mathfrak{J}}$ ノ direct summand ナルコトヲ示サウ。

Lemma 2 ニヨレバ Lie ring $\widehat{\mathfrak{J}}$ ハ semi-simple ナ Lie ring $\overline{\mathfrak{J}}_1$ (of the Lie group germ $\mathfrak{G}_1$) ト可換ナ Lie ring $\overline{\mathfrak{J}}_2$ (of the Lie group germ $\overline{\mathfrak{G}}_2$) トノ直和ニナル。$\overline{\mathfrak{J}}_1$ ハ semi-simple ダカラ Cartan ノ基本定理ニヨリ, simple 且ツ semi-simple ナ ideal ノ直和ニナル。又 $\overline{\mathfrak{J}}_2$ ノ基ハ

i) aE, a ハ複素数（$=0$, 若シ $\overline{\mathfrak{J}}_2 = 0$ ナラバ）

又ハ

ii) E 及ビ $\sqrt{-1}E$

ヨリ成ル。ヨッテ $\widehat{\mathfrak{J}}$ ハ単純 ideal ノ直和ニナル, 従ッテ ideal $\overline{\mathfrak{J}}$ ハ $\widehat{\mathfrak{J}}$ ノ direct summand デアル。

次ニ $\overline{\mathfrak{J}} \geqq \overline{\mathfrak{J}}_1$ ヲ示サウ。若シ然ラズトスレバ $\overline{\mathfrak{J}}$ ハ $\widehat{\mathfrak{J}}$ ノ ideal ダカラ $\overline{\mathfrak{J}}_1 \geqq \overline{\mathfrak{J}}_1'$ ナル semi-simple ナ ideal $\overline{\mathfrak{J}}_1'$ が存在シナケレバナラナイ。$\widehat{\mathfrak{J}}$ ハ単純 ideal ノ直和ダカラ $\overline{\mathfrak{J}}_1'$ ハ $\overline{\mathfrak{J}}$ ト commutative デナケレバナラナイ.

(*) $[X,Y]=0, \quad X \in \overline{\mathfrak{J}}, \quad Y \in \overline{\mathfrak{J}}_1'.$

故ニ $\overline{\mathfrak{G}}$ が irreducible ナ group germ ダカラ, Schur

ノ Lemma ニヨリ，$\overline{\mathfrak{J}}_1'$ ノ行列ハ全テ αE ノ形デナケレバナラナイ。ヨツテ $\overline{\mathfrak{J}}_1'$ ハ semi-simple デアリ得ナイ。之ハ矛盾デアルカラ $\overline{\mathfrak{J}} \supseteqq \overline{\mathfrak{J}}_1$ デナケレバナラナイ。

上ノ証明ノ仕方カラ $\overline{\mathfrak{J}}$ ガ irreducible 且ツ semi-simple ナラバ $\overline{\mathfrak{J}} = \widetilde{\mathfrak{J}}$ デアル。何トナレバ Lemma 2′ ニヨリ $\widetilde{\mathfrak{J}}$ ハ semi-simple ダカラ。ヨツテ上ノ Lemma 2 ニ於ケル $\overline{\mathfrak{G}}_1$ 及ビ $\overline{\mathfrak{G}}_2$ ハ Lie 群芽ナルノミナラズ Lie 群デアル。

次ニ $\overline{\mathfrak{J}} \supseteqq \overline{\mathfrak{J}}_2$ ガ云ヘレバ定理ノ証明ハ済ンダコトニナル。

コノ為メニ二ツノ case ニ分ケル。

Case 1. $\overline{\mathfrak{J}}_2$ ノ base $= aE$ ($\overline{\mathfrak{J}}_2 = 0$ ノトキハ $a=0$)。$\overline{\mathfrak{J}}_2 \neq 0$ 且ツ $\overline{\mathfrak{J}} = \overline{\mathfrak{J}}_1$ トセヨ。然ラバ，Lemma 2′ ニヨリ，群芽 $\overline{\mathfrak{G}}$ ハ Lie 群 $\overline{\mathfrak{G}}_1$ ノ単位ノ近傍ニナル。之レハ $\overline{\mathfrak{J}}_2 = 0$ ヲ示スカラ不合理デアル。ヨツテ $\overline{\mathfrak{J}} \supseteqq \overline{\mathfrak{J}}_2$。

Case 2. $\overline{\mathfrak{J}}_2$ ノ base $= E$ 及ビ $\sqrt{-1}\,E$. E モ $\sqrt{-1}\,E$ モ $\overline{\mathfrak{J}}$ ニ属サズトスレバ上ノ如クシテ $\overline{\mathfrak{J}}_2 = 0$. 次ニ E 又ハ $\sqrt{-1}\,E$ ノ何レカ一方ノミガ $\overline{\mathfrak{J}}$ ニ属スルトセヨ。之レヲ E トスル。然ラバ E ハ全テノ行列ト可換ダカラ定義ニヨリ，$\widetilde{\mathfrak{G}}$ ノ任意ノ行列ハ

$$A_1 A_2 \cdots\cdots A_k Y \begin{cases} A_i \in (\overline{\mathfrak{G}} \text{ ト } \overline{\mathfrak{G}}_1 \text{ トノ共通集合}) \\ Y = \exp(tE),\ t \text{ real} \end{cases}$$

ノ形又ハ斯ル形ノ行列ノ極限デアル。ヨツテ $X \in \widetilde{\mathfrak{G}}$ ニ対シテ $\det(X) = \exp(t)$，t real，デアル。故ニ $\sqrt{-1}\,E$ ハ

$\widetilde{\mathfrak{I}}$ ニ属シ得ナイ。之レハ不合理ダカラ $\overline{\mathfrak{I}} \supseteq \overline{\mathfrak{I}}_2$ デナケレバナラナイ。

故ニ $\overline{\mathfrak{I}} = \widetilde{\mathfrak{I}}$ デナケレバナラナイ。 ——以上——