568. Polygenic function ノ rectilinear derivative ニツイテ

井上　正雄（阪大）

Polygenic function $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $z=x+iy$ ノ rectilinear n-th derivative ヲ

$$\frac{d^n f(z)}{dz^n_\theta}$$

トスレバ

$$\frac{d^n f}{dz^n_\theta}=(\bar{\mathscr{D}}+\mathscr{D}e^{-2i\theta})^n f(z)$$

$$=\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\bar{\mathscr{D}}^r\mathscr{D}^{n-r}(f(z))e^{-2(n-r)i\theta}$$

但シ　$\mathscr{D}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right]$,　$\bar{\mathscr{D}}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right]$

依ッテ今　$\binom{n}{r}\bar{\mathscr{D}}^r\mathscr{D}^{n-r}=g_{n-r}$ トスレバ

$$\frac{d^n f(z)}{dz^n_\theta}=\sum_{r=0}^{n}g_r(z)e^{-2ri\theta}$$

即チ　$\dfrac{d^n f(z)}{dz^n_\theta}$

ハ一ツノ centerfunction g_0 ト n 個ノ phasefunction

$g_r\,(r=1,2,\cdots\cdots,n)$ トニ依ッテ合成サレル。以後コノ関係ヲ

$$D^n f=\frac{d^n f}{dz^n}=\gamma_n(g_0,g_1,\cdots\cdots\cdots,g_n)$$

デ表ハス。[1]

或ハ

$$\left(\frac{n-r}{n}g_r+\frac{r+1}{n}g_{r+1}e^{-2i\theta}\right)=\gamma\left(\frac{n-r}{n}g_r,\frac{r+1}{n}g_{r+1}\right)=\Gamma_{r+1}$$

トスレバ

$$\frac{d^n f}{dz^n_\theta}=\sum_{r=1}^{n}\Gamma_r e^{-2(r-1)i\theta}$$

トナル。

即チ n 個ノ fundamental (-circular) function Γ_r $(r=1,\cdots\cdots,n)$ ニ依ッテモ決定サレルカラ コノ関係ヲ

$$D^n f=\frac{d^n f}{dz^n}=\sigma_n(\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots\cdots\cdots,\Gamma_n)$$

デ表ハス。

特ニ $n=1$ ナルトキハ $\frac{df}{dz_\theta}=g_0+g_1e^{-2i\theta}$ トナルカラ Df ニヨリ point-circle ノ對應——所謂 Kasner ノ clockmotion——ガ得ラレ，θ ガ $0\longrightarrow 2\pi$ ト移動スレバ $\frac{df}{dz_\theta}$ ハ逆ノ方向ニ 2倍ノ速度デ g_0 ヲ中心トシ $|g_1|$ ヲ半径トスル円ヲ二周スル。

$n=2$ ノトキハ

$n=1$ ノトキハ之レヲ省略スル、又 $D^0f=f$ トシテオク。

$$\frac{d^2 f}{d\zeta_\theta^2} = g_0 + g_1 e^{-2i\theta} + g_2 e^{-4i\theta}$$

トナルカラ

$$\frac{d^2 f}{d\zeta_\theta^2}$$

ハ $(g_0 + g_2 e^{-4i\theta})$ ヲ basiscircle トシ $|g_1|$ ヲ determining-length トスル limaçon ヲ画ク。(2)

依ッテ

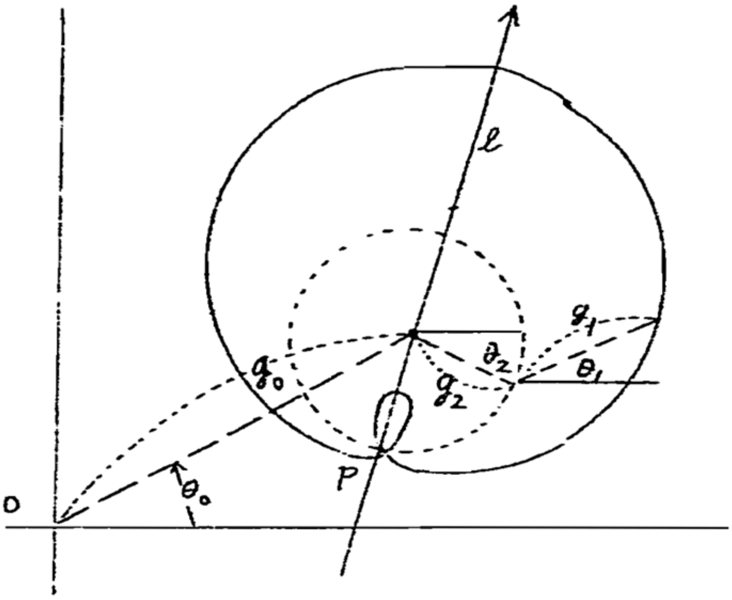
$$g_j = r_j\, e^{i\theta_j},$$

$$|\theta_j| \leqq \pi \quad (j=0,1,2)$$

トスレバ，コノ limaçon ノ normal form ハ

$$\rho = r_1 + 2 r_2 \cos \Theta$$

トナル。



尚又 pole ハ $p(r^*, \theta^*) = r_0 e^{i\theta_0} + r_2 e^{i(2\theta_1 - \theta_2 + \pi)}$, initial line. P ヲ通ッテ argument ガ $\omega = 2\theta_1 - \theta_2$ ナル半直線トナル。〔Symmetric axis l ノ方程式ハ $r \sin(\omega - \theta) = r^* \sin(\omega - \theta^*)$ デアル〕

カクテ上述ノ Θ ハ

$\Theta = 2(\omega - \theta)$ ヲ満足スルコトガワカル。

---

(2) E. Kasner: The second derivative of a Poly. fu. Trans. A. M. S. 30 (1928)

以上ヨリ，D^2f ニヨリ，一般ニハ[3] point-limaçon ノ對應ガ得ラレ，θ ガ $0 \longrightarrow 2\pi$ ト動ケバ $\dfrac{d^2f}{dz^2_\theta}$ ハ p ヲ中心トシテ測ッタ2倍ノ角速度デコノ limaçon ヲ逆方向ニ二周スル。

$n \geq 3$ ノトキモ矢張リ，D^nf ニヨリ、更ニ複雑ナル point-element ノ對應ガ得ラレル。

次ニカヽル D^nf ニヨル point-element ノ對應ノ characterization ノ問題ヲ考ヘル：即チ先ヅカヽル point-element ノ對應ヲ支ヘタトキコレヲ $\dfrac{d^nf}{dz^n_\theta}$ トシテモツ Polygenic function f ノ存在スルタメノ必要且ツ充分ナル條件ヲ求メル。

之レニ関シテ次ノ定理ガ成立スル。コレハ Kasner ノ論文[4]ニヲケル結果ノ一ツノ拡張デアル。

定理.

$g_i(z)$ $(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ ヲ Polygenic function トスルトキ

$$D^nf(z) = \gamma_n(g_0, g_1, \cdots\cdots, g_n)$$

$$D^rf(z_0) = \gamma_r(a_{r0}, a_{r1}, \cdots\cdots, a_{rr})$$

$$(r=0,1,\cdots\cdots,n-1)$$

---

(3) "一般ニハ" ト云ッタノハ limaçon ガ degenerate シテ圓或ハ點トナリ速度ノ関係ガ保タレナイ場合ガアルカラデアル。

(4) E. Kasner: A complete charact. of the deriv. of a poly. fn.

Proc. Nat. Acad. Sci. v.22, 1936

ヲ満足スル Polygenic function $f(z)$ ガ存在スルタメノ必要且ツ充分ナル條件ハ

$$(n-r)\mathcal{D}(g_r)=(r+1)\overline{\mathcal{D}}(g_{r+1})$$
$$(r=0,1,\cdots\cdots,n-1)$$

ガ成立スルコトデアル。尚コノトキ $f(z)$ ハ z_0 ノ近傍デ一意的ニ定ル。

但シ a_{rs} ($r,s=0,1,\cdots\cdots,n-1$; $r\geqq s$) ハ任意ノ有限ナル實數又ハ複素數トス。

(証) 帰納法ニヨッテ証明スル。以下スベテ局部的ニ考察スル。

$n=1$ ノトキ[4]

必要ナルコト　$f=u+iv,\ g_r=\varphi_r+i\psi_r$ $(r=0,1)$

トスルトキ

$$\frac{df}{dz_\theta}=\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}+i\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\}e^{-2i\theta}$$

$$=(\varphi_0+i\psi_0)+(\varphi_1+i\psi_1)e^{-2i\theta}$$

トナルカラ、コレヨリ簡單ナル計算ニヨリ

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(\psi_1-\psi_0)&=\frac{\partial}{\partial y}(\varphi_0+\varphi_1)\\ \frac{\partial}{\partial x}(\varphi_0-\varphi_1)&=\frac{\partial}{\partial y}(\psi_0+\psi_1)\end{aligned}\right\}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

ヲ得ル。

之レヨリ直チニ　$\mathcal{D}(g_0)=\overline{\mathcal{D}}(g_1)$

充分ナルコト

$$\vartheta(g_0)=\bar{\vartheta}(g_1)$$

ヨリ (1) ガ出ルカラ

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial}{\partial x}u=g_0+g_1,\ \dfrac{\partial}{\partial y}u=\psi_1-\psi_0,\ u(x_0,y_0)=\mathcal{R}(a_{00})\\ \dfrac{\partial}{\partial x}v=\psi_0+\psi_1,\ \dfrac{\partial}{\partial y}v=g_0-g_1,\ v(x_0,y_0)=\mathcal{J}(a_{00})\end{array}\right\}$$

ヲ満足スル $u(x,y)$, $v(x,y)$ ガ（一意的）＝存在スル。

ヨッテ $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ トスレバ之レガ求ムル Polygenic function デアル、カヽル $f(z)$ ガ唯一ツ存在シ得ナイコトハヨク知ラレタトコロデアル。

次＝ $n=p-1$ 迄成立シタトシ $n=p$ ノトキ矢張リ成立スルコトヲ証明シヤウ。

必要ナルコト

$$D^{p-1}f(z)=\gamma_{p-1}(h_0,h_1,\cdots\cdots,h_{p-1})$$

トスレバ

$$(p-1+r)\,\vartheta(h_r)=(r+1)\,\bar{\vartheta}(h_{r+1})\quad(r=0,1,\cdots\cdots,p-2)\cdots(2)$$

ガ成立スル。

更＝

$$D^pf(z)=D\gamma_{p-1}(h_0,h_1,\cdots\cdots,h_{p-1})=\gamma_p(g_0,g_1,\cdots\cdots,g_p)$$

之レヨリ

$$\left.\begin{array}{l}\bar{\vartheta}(h_0)=g_0\\ \bar{\vartheta}(h_{r+1})+\vartheta(h_r)=g_{r+1}\quad(r=0,1,\cdots\cdots,p-2)\\ \vartheta(h_{p-1})=g_p\end{array}\right\}\cdots\cdots(3)$$

ヲ得ル。(2) 及 (3) ヨリ直チ＝

$$(p-r)\,\mathfrak{D}(g_r)=(r+1)\,\overline{\mathfrak{D}}(g_{r+1})\quad(r=0,1,\cdots\cdots,p-1)\cdots\cdots(4)$$

ガ成立スル。

充分ナルコト

(4)ガ成立スルカラ

$$Dh_r(z)=\gamma\left\{\frac{p-r}{p}g_r,\ \frac{r+1}{p}g_{r+1}\right\}$$

$$h_r(z_0)=a_{p-1,r}\qquad(r=0,1,\cdots\cdots,p-1)$$

ヲ満足スル polygenic function $h_r(z)$ ガ(一意的ニ)定ル。

コノ $h_r(z)$ ニ対シテハ

$$\mathfrak{D}(h_r)=\frac{r+1}{p}g_{r+1}$$

$$\overline{\mathfrak{D}}(h_{r+1})=\frac{p-1-r}{p}g_{r+1}$$

トナルカラ

$$(p-1-r)\,\mathfrak{D}(h_r)=(r+1)\,\overline{\mathfrak{D}}(h_{r+1})$$

$$(r=0,1,\cdots\cdots,p-2)$$

ガ成立スル。ヨッテ

$$D^{p-1}f(z)=\gamma_{p-1}(h_0,h_1,\cdots\cdots,h_{p-1})$$

$$D^rf(z_0)=\gamma_r(a_{r0},a_{r1},\cdots\cdots,a_{rr})$$

$$(r=0,1,\cdots\cdots,p-2)$$

ヲ満足スル Polygenic function $f(z)$ ガ(一意的ニ)定ル。

之レガ求ムル函数デアル。カヽル函数 $f(z)$ ノ一意性モ亦明カデアル。　(証了)

尚又、定理ノ條件ハ次ノヤウニ書キ換ヘルコトガ出來ル。(4)

$\Gamma = \gamma(h_0, h_1)$ ヲ與ヘタトキノ任意ノ点 z ニ関シテ，z ノ近傍ト $(h_0 + h_1)$ ノ近傍トノ間ニ次ノ如キ對應 T —— コレヲ associated affinity トヨブ —— ヲ考ヘル。

$$\left.\begin{aligned} \Delta h_0(z) &= h_0(z + \Delta z) - h_0(z) \\ \overline{\Delta} h_1(z) &= h_1(z + \overline{\Delta z}) - h_1(z) \end{aligned}\right\} \text{トシ}$$

$$T(z + \Delta z) = h_0(z) + h_1(z) + \Delta h_0(z) - \overline{\Delta} h_1(z)$$

トスルトキ

定理ノ條件ハ次ノ條件ト同値デアル。

" $\gamma_n(g_0, g_1, \cdots\cdots, g_n) = \sigma_n(\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots\cdots, \Gamma_n)$

トスルトキ Γ_i $(i = 1, 2, \cdots\cdots, n)$ ノ associated affinity T_i ガ direct similarity (conformal) デアル。"

以上デ $D^n f$ ガソノ fundament(-circular) function ノ affine-similitude デ characterize サレルコトガ解ル。(了)