563. 等角寫像ノ簡單ナ一二ノ例題

黒田　稲夫（山形）

遠方ノ山々ニハ未ダ雪ガ残ッテ居マスガ次第ニ芽グム春ノ陽氣ニ誘ハレルマヽニ次ノ樣ナコトヲ試ミテミマシタ。前期學生ノ方々ノ演習問題ノ一ツニデモナリマセウカ。

z平面上ノ二定点 $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$, $a>0$ カラノ距離ノ積ガ b^2 ニ等シイ点 P ノ軌跡即チ所謂 Cassinian oval ヲ考ヘ点 P ヲ z デ表シマスト

$$b^2 = AP \cdot A'P$$

或ハ

$$b^2 = |z-a| \cdot |z+a| = |z^2-a^2|$$

デアリマスカラソコデ

$$w = z^2 - a^2$$

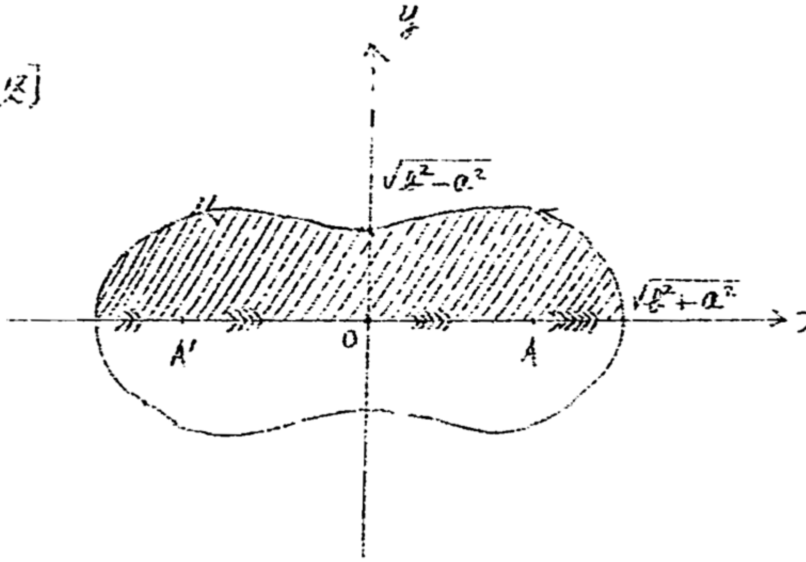
ナル函数ヲ作ッテミマス。然ルトキハコレト今一ツ $w' = \dfrac{w}{b^2}$ カラ得ラレル關係

$$(1)\quad w' = \frac{1}{b^2}(z^2 - a^2)$$

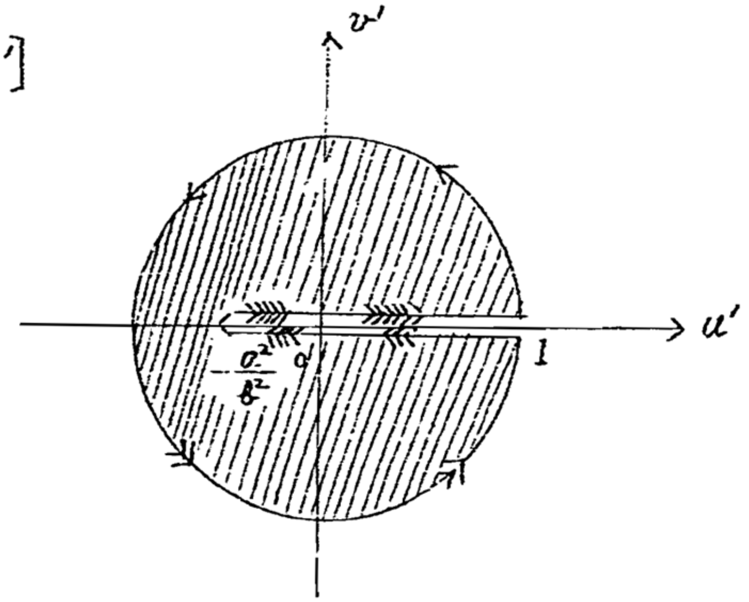
ニヨッテ $0 < b \leqq a$ ナル場合ノ z 平面ノ oval ノ内部ヲ w' 平面ノ單位円内ヘ一對一ニ且ツ等角ニ寫像スルコトガ出來マス。

次ニ $b > a$ ナル場合ニハ先ヅ (1) ニヨッテ次ノ寫像ガ得ラレルコトハ容易ニ知ラレマス。

[z]



[w']

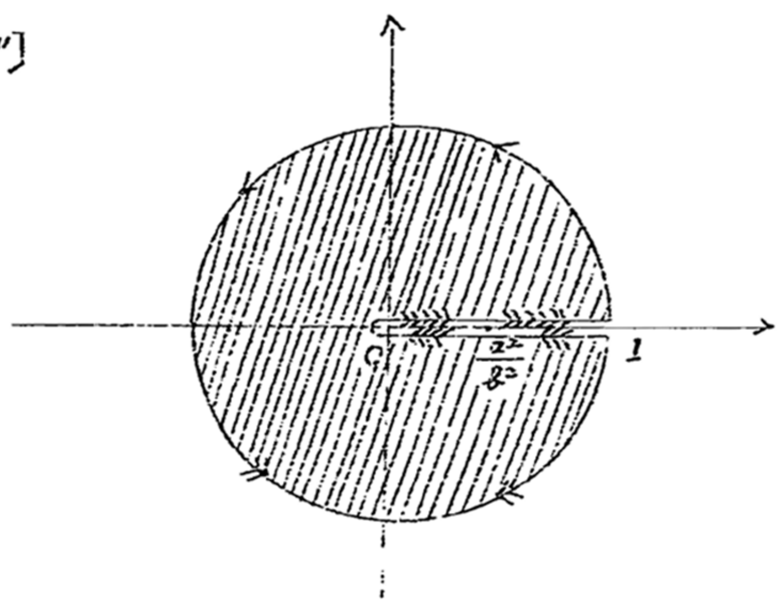


ソコデ函数

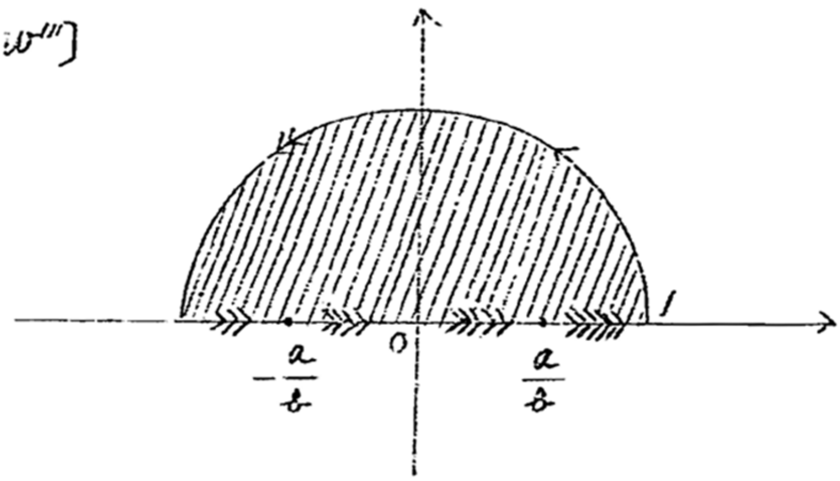
$$(2)\quad w'' = \frac{w' + \dfrac{a^2}{b^2}}{\dfrac{a^2}{b^2}w' + 1},\quad w''' = \sqrt{w''}$$

ニヨツテ w' 平面ノ指摘セラレタ面分ヲ次ノ如ク漸次変形シテ行キマス。

〔w''〕



〔w'''〕

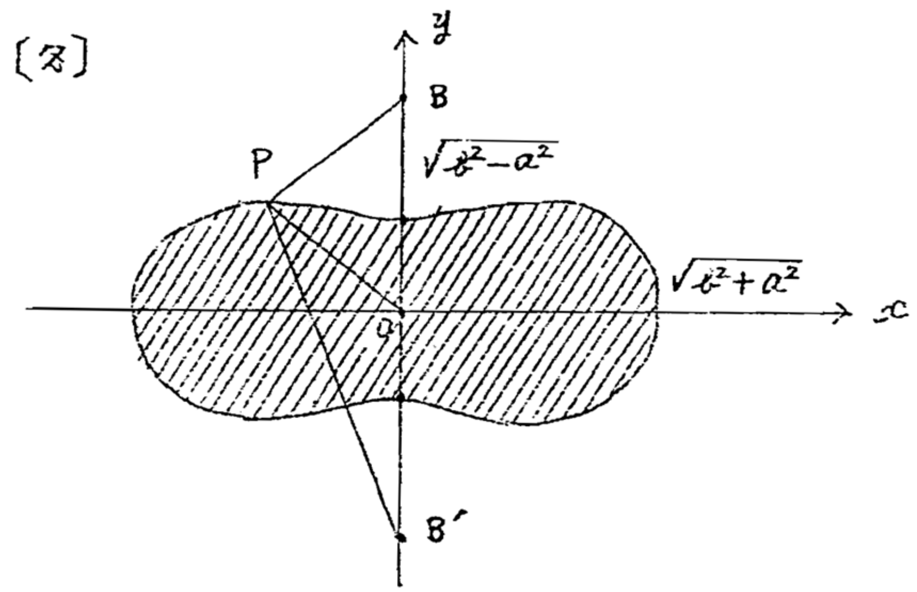


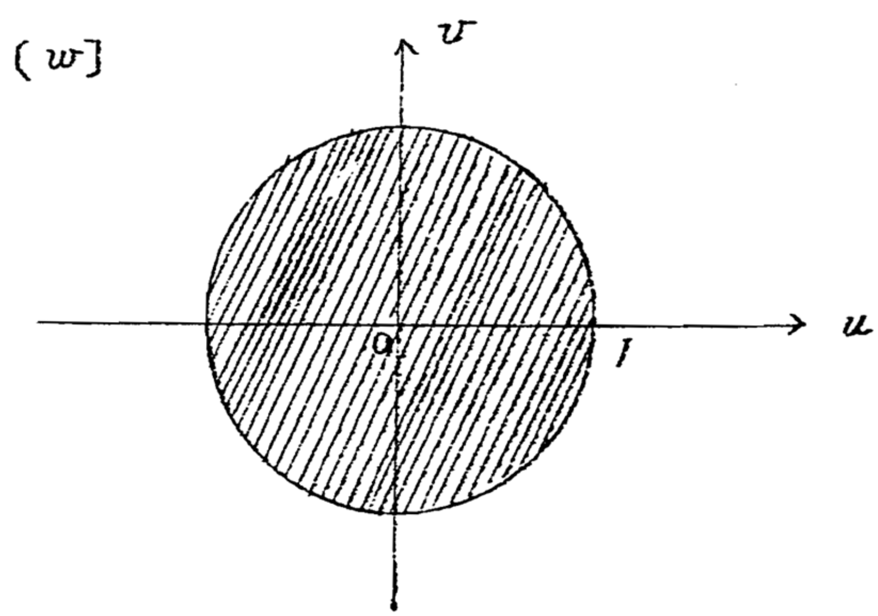
(1), (2) カラ w''' ト ζ ノ関係ヲ求メマスト

$$w''' = \sqrt{\frac{\frac{1}{b^2}(\zeta^2 - a^2) + \frac{a^2}{b^2}}{\frac{a^2}{b^4}(\zeta^2 - a^2) + 1}} = \frac{b\zeta}{\sqrt{a^2\zeta^2 - a^4 + b^4}}$$

トナリマス。ソレ故 w''' ヲ w ト書改メマスト結局次ノ寫像ガ得ラレマス。

$$(3) \quad w = \frac{b\zeta}{\sqrt{a^2\zeta^2 - a^4 + b^4}}, \quad b > a > 0$$





zガ oval ヲ画クトキ (3) ニヨリ w ハ単位円ヲ画キマスカラ此ノ場合両辺ノ絶対値ヲトッテ書直シテミマスト

$$\frac{|z|}{\sqrt{\left|z-\frac{\sqrt{b^4-a^4}}{a}i\right|\cdot\left|z+\frac{\sqrt{b^4-a^4}}{a}i\right|}}=\frac{a}{b}$$

トナリマス。

　ソレ故今z平面上ニ於テ二点

$$B\left(0, \frac{\sqrt{b^4-a^4}}{a}\right), \quad B'\left(0, -\frac{\sqrt{b^4-a^4}}{a}\right)$$

ヲ考ヘ oval ノ上ノ一点ヲ P トシマスト

$$(4) \quad \frac{OP}{\sqrt{BP \cdot B'P}} = \frac{a}{b} < 1$$

ナル関係が得ラレマス。

尚念ノタメ二定点 $B(0, c)$, $B'(0, -c)$, $c > 0$ ヲ考ヘ

$$(4)' \quad \frac{OP}{\sqrt{BP \cdot B'P}} = c' < 1$$

ナル関係ヲ満足セシメル点 $P(x, y)$ ノ軌跡ノ方程式ヲ求メテミマス・先ヅ c, c' ヲ用ヒテ

$$a = \frac{cc'^2}{\sqrt{1-c'^4}}, \quad b = \frac{cc'}{\sqrt{1-c'^4}}$$

ナルモノヲ作リマスト

$$c = \frac{\sqrt{b^4-a^4}}{a}, \quad c' = \frac{a}{b} < 1$$

トナリマスカラ (4)′ カラ

$$(x^2+y^2)^2 = \frac{a^4}{b^4}\left\{\left(x^2+y^2+\frac{b^4-a^4}{a^2}\right)^2 - 4\frac{b^4-a^4}{a^2}y^2\right\}$$

コレヲ書直シマスト

$$(5) \quad (x^2+y^2+a^2)^2 - 4a^2x^2 = b^4, \quad b > a > 0$$

即チ oval. ノ方程式トナルコトガ看取セラレマス。

次ニコレト関聯シテ今 w 平面上ノ楕円 $\dfrac{u^2}{a^2}+\dfrac{v^2}{b^2}=1$, $a>b>0$ ノ中心ニ関スル垂足曲線 $\rho^2=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta$ ヲ考ヘテミマス。

コレハ楕円 $\rho_1^2=\dfrac{a^2b^2}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}$ 或ハ

$w_1=b\cos\theta_1+i\,a\sin\theta_1$ ノ円 $\rho_2=\sqrt{ab}$ ニ関スル相反曲線デ

$$\rho=\frac{ab}{\rho_1}$$

ナル関係ガアリマスカラコレヨリ暗示ヲ受ケテ

$$w=\frac{ab}{\overline{w_1}}$$

$$=\frac{ab}{b\cos\theta_1-i\,a\sin\theta_1}$$

$$=\frac{ab}{b\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)-ia\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)},$$

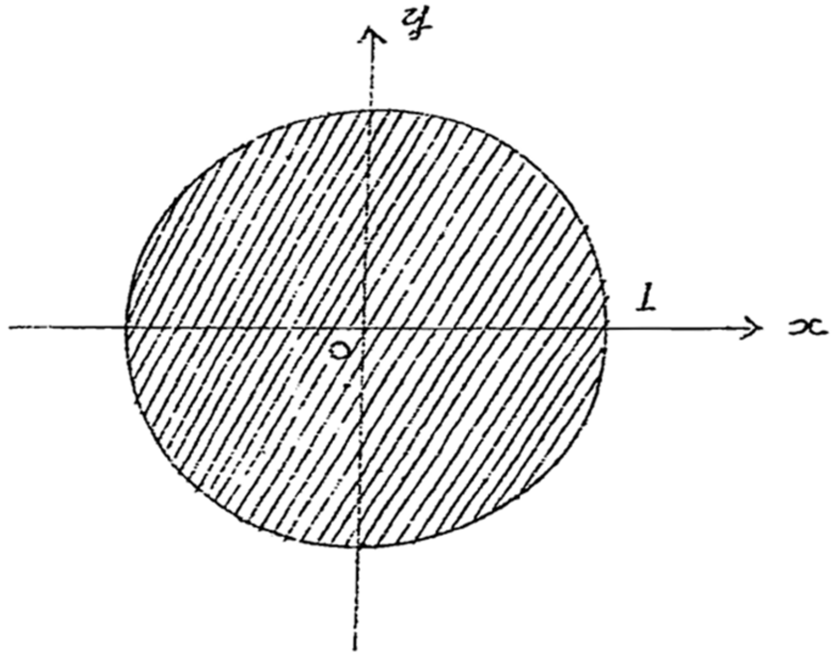
$$z=\cos\theta_1+i\sin\theta_1$$

$$=\frac{-2abz}{(a-b)z^2-(a+b)}$$

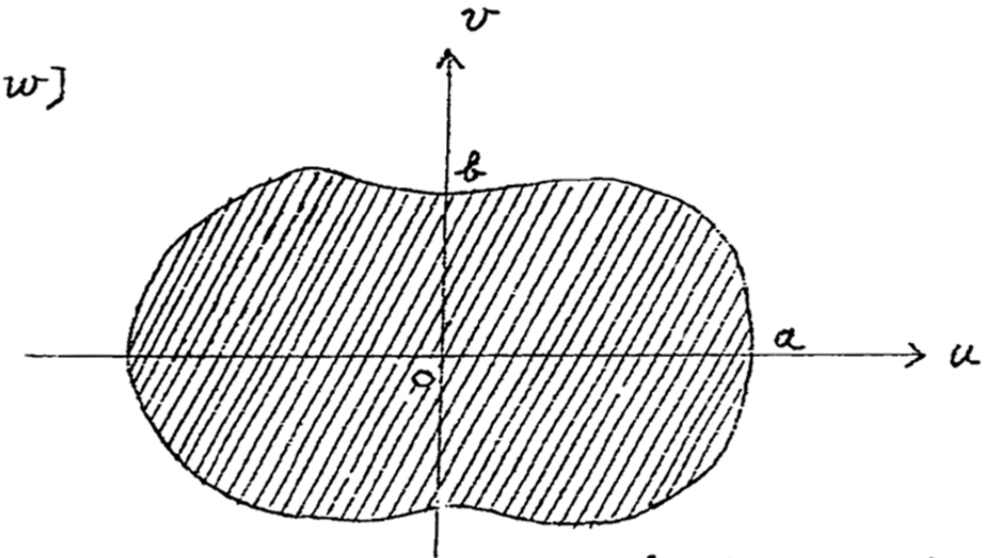
ナル函数ヲ作ッテミマストコレニヨッテ次ノ寫像ガ得ラレルコトニナリマス。

$$(6)\qquad w=\frac{-2abz}{(a-b)z^2-(a+b)},\quad a>b>0$$

[z]



[w]



$$\rho^2 = a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2\theta$$