559. 非同次型線状移動可能函數方程式ニ就イテ (VII)

北川　敏男（阪大）

1. (VI)マデノ結果ニ於テ得ラレタ解ハ，$g(x)$ ヲ low frequency part $g_1(x)$, high frequency part $g_2(x)$ ニ分ケ、各々ニ対應スル解ヲ求メタモノデアル。ソノ方法ニヨリ、得ラレタ解ニ多少ノ意味ハアルニシテモ，畢竟特別ナ解ニ止マル。

茲デハ更ニ Operator Γ ニ制限ヲツケルコトニヨリ、同ジ方法デ得タ解ノ性質ヲ調ベテ見ヨウト思フ。茲デ得タ結果ヲ先ヅ述ベテ置ク。

函數方程式

(1) $\quad \Gamma f(x) = g(x) \quad (-\infty < x < \infty)$

ニ於テ次ノコトヲ假定スル。

I. 母函數 $G(\lambda)\left(=\int_0^1 e^{\lambda t}\,dg(t)\right)$ ノ零点ハ悉ク純虚數デアルトスル。

II. $G(\lambda)$ ガ index s デ區間 $(\varepsilon, 1-\varepsilon)$ デ O-associated デアルトシ，ε ハ如何ニ小ナル正數デアッテモヨイトスル。ソノ意味ハ次ノ如クデアル：適當ナ Contours ノ sequence $\{C_r\}$ ガアッテ $r\to\infty$ ノトキ

(2) $$\int_C \left|\frac{e^{\lambda\xi}}{\lambda^s G(\lambda)}\right| |d\lambda| = O(1)$$

（$\varepsilon^{\gamma}\leqq q\leqq 1-\varepsilon$ ニ對シテ）デアルコトヲ意味スル。

III. $G^{(\nu)}(0)=0$,（$\nu=0,1,2,\cdots\cdots,k-1$）, $G^{(k)}(0)\neq 0$ (1)

IV. 半平面 $R(\lambda)\geqq\varepsilon$ 並ビニ $R(\lambda)\leqq-\varepsilon$ ニ於テ夫々

(3) $$\frac{1}{G(\lambda)}=\int_a^{\infty}e^{-\lambda t}\,d\alpha(t)$$

(4) $$\frac{1}{G(\lambda)}=\int_{-\infty}^{a}e^{-\lambda t}\,d\beta(t)$$

ナル展開が成立スルトスル。εハ任意ノ正数デアル。(2)

V. 任意ノ正数qがアツテ

(5) $$\int_a^{\infty}|t|^{-q}\,|d\alpha(t)|<\infty$$

(6) $$\int_{-\infty}^{\infty}|t|^{-q}\,|d\beta(t)|<\infty$$

次ニ與ヘラレタ函数 $g(x)$ ニ関シテ次ノコトヲ假定スル。

(7) $$\lim_{|x|\to\infty}g^{(m)}(x)=0$$

(8) $$\lim_{|x|\to\infty}g^{(\nu)}(x)=\text{finite}\quad(\nu=m-k,\ m-k+1,\cdots,m-1)$$

而シテ $m-k>s$ トスル。

然シテ

(9) $$\int_{-\infty}^{\infty}g^{(m)}(x-t)\,\dot{B}^{k}_{m-k}(t)\,dt$$

---

(1) $k=0$ デモヨイカラ、コレハ essential ナ假定デナイ。

(2) コノ假定ハアル點デハ（VI）ノソレヨリモ広イ。

ガ存在スル。然ルトキニハ，補助函数 $\varphi_A(u)$ ヲ (V) ノ如ク定義スルトキ

$$(10)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu^{k}(0)\, g_1^{(\nu-k)}(x) + \int_a^\infty g_2(x-t)\,d\alpha(t)^{(3)}$$

ハ，(1) ヲ $-\infty < x < \infty$ ニテ満足シ，コレヲ $f^*(x)$ トオクトキ

$$(11)\qquad \lim_{|x|\to\infty} f^{*(m)}(x) = \text{finite}$$

トイフ性質ガアル。

（注意）以上ノ結果ハ，Nörlund ノ定差方程式

$$(12)\qquad f(x+1)-f(x)=g(x) \qquad (-\infty<x<\infty)$$

ノ主解ニ全ク analogous ナモノデアル。コノ場合ニハ、$k=1$ デアリ、$s=1$ デアル。(3), (4) ナル Stieltjes 積分ハ特ニ級数トシテ表ハサレル。

但シ、注意スベキ相違点トシテハ，上ノ如キ $f^*(x)$ ハ unique デアルコトガ (12) ノ場合ニハ言ヘルノデアルケレドモ一般ニハソウハ行カナイ。

2. 簡単ニ証明ノ荒筋ヲノベヨウ。 $g_1(x)$ ニ関係シタ部分ハ既ニノベタコトソノマヽデヨイ。$g_2(x)$ ニ関シタ部分

(3) $g_1(x)$, $g_2(x)$ ノ定義ハ既ニ (V) デ與ヘテアル。又 $\nu>0$ ノトキ

$$g_1^{(-\nu)}(x)=\frac{1}{\nu!}\int_0^x g_1(t)(x-t)^\nu dt \text{ ヲ意味スル。}$$

ニ於テハ、容易ニワカル如ク形式的ニ

$$(13)\quad \Gamma\left[\int_a^{\infty} g_2(x-t)\,d\alpha(t)\right]=g_2(x) \quad (-\infty<x<\infty)$$

ナルコトヲ注意シ，問題ハ

$$(14)\quad \int_a^{\infty} g_2(x-t)\,d\alpha(t)$$

ノ存在ニ係ッテクル。サテコレノ存在ト，

$$(15)\quad \int_a^{\infty} g_2(x-t)\,d\alpha(t)-\int_{-\infty}^{a} g_2(x-t)\,d\beta(t)$$

ノ存在トノ equivalence デアルコトヲ Wiener ノ方法ニヨッテ示スコトガ出来ル。[4]

サテ既ニノベタ如ク

$$g_2(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} g^{(m)}(x+t)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iut}}{(iu)^m}(1-\varphi_A(u))du\right\}dt$$

デアルコトカラ、假定 V ニ注意シテ

$$(16)\quad \rho(x)=\frac{1}{2\pi}\int_a^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iu(x-t)}}{(iu)^m}(1-\varphi_A(u))\,du\right]d\alpha(t)$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{a}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iu(x-t)}}{(iu)^m}(1-\varphi_A(u))\,du\right]d\beta(t)$$

ノ存在ガワカル。コノ $\rho(x)$ ガ又

$$(17)\quad \Gamma\rho(x)=0 \qquad (-\infty<x<\infty)$$

デアルコトハソノツクリ方カラ明デアル。

---

(4) N. Wiener, Journ, Math. Phys. M.I.T. (1925)

$\rho(x)$ガ如何ナルモノデアルカヲ調ベルコトガ問題ニナル。シカルトキ

$$(18)\quad \rho(x)=\dot{B}^{k}_{m-k}(x)\qquad(-\infty<x<\infty)$$

トナルコトガ示サレル。コレガ示サレルトアレバ，前述引用ノ Wiener ノ方法ガソノマヽアテハマルノデアル。コヽニ $\dot{B}^{k}_{m-k}(x)$ ハ次ノ如キモノデアル。

$$(19)\quad \begin{cases} \Gamma\dot{B}^{k}_{m-k}(x)=0 & (-\infty<x<\infty) \\ \dot{B}^{k}_{m-k}(x)=B^{k}_{m-k}(x) & (0<x<1) \end{cases}$$

以上ガ証明ノ筋デアル。(18)ヲ示スタメニ、吾々ハ Cauchy 級数論ヲ用ヰナケレバナラナイ。ソレヲ大略次節デ述ベル。

3. $\rho(x)$ハ(17)ヲミタス。ヨッテ Cauchy 級数論ニヨリソレハ展開ノ始点 x_0 ニ無関係デアル。ヨッテ $x_0=0$ トシテヨイ。即チ

$$(20)\quad T(x,x_0;\rho)=T(x,0;\rho)$$

$$\equiv\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{e^{\lambda x}}{G(\lambda)}\Gamma_{0\xi}\left[e^{\lambda\xi}\int_0^{\xi}e^{-\lambda\tau}\rho(\tau)d\tau\right]d\lambda$$

茲ニ於テ吾人ハ

$$(21)\quad h_\lambda(s)\equiv\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ius}(1-g_A(u))}{(iu-\lambda)(iu)^m}du$$

ヲ計算セネバナラナイ。(5) [脚註次頁ニ]

m回微分ノ後

$$\frac{d^m h_\lambda(s)}{ds^m} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ius}}{iu-\lambda}du - \frac{1}{2\pi}\int_{-(A+\delta)}^{A+\delta} \frac{e^{ius} g_A(u)}{iu-\lambda}du \tag{22}$$

ソコデ

$$\phi(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-(A+\delta)}^{A+\delta} g_A(u)\, e^{ius} du \tag{23}$$

トオクトキ

$$\phi(s) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{i}{s}\right)^p \int_{-(A+\delta)}^{A+\delta} g_A^{(p)}(u)\, e^{ius} du$$

ダカラ

任意ノ p ニ對シテ

$$\phi(s) = o\left(\frac{1}{s^p}\right) \tag{24}$$

トナル。從ツテ

$$\phi_*^{(-\nu)}(s) = \int_s^{\infty} \phi(\tau)\frac{(s-\tau)^\nu}{\nu!}d\tau \tag{25}$$

$$\phi_{**}^{(-\nu)}(s) = \int_{-\infty}^{s} \phi(\tau)\frac{(s-\tau)^\nu}{\nu!}d\tau \tag{26}$$

ガスベテノ $\nu \geqq 0$ ニ對シテ存在スル。Laplace 積分ノ理論ニヨツテ

---

(5) $g_A(u)$ ヲ m ニ depend シタ p ガアツテ $g_A^{(p)}(u) \equiv 0$ トスレバ話ハ簡單デアルケレドモ、ソレデハスベテノ m ニ無関係ナ一ツノ解ノ formula ヲ與ヘルコトニナラナイ。ソコデ (VI) トハ別ニ計算スルワケデアル。

$$(27)\quad h_\lambda^{(m)}(s)=\begin{cases} -e^{\lambda s}\int_s^{\infty}\phi(s)e^{-\lambda s}ds & [s<0] \\ -e^{-\lambda s}-e^{\lambda s}\int_s^{\infty}\phi(s)e^{-\lambda s}ds & [s>0] \end{cases} \quad R(\lambda)>0 \text{ ノトキ}$$

$$=\begin{cases} -e^{-\lambda s}+e^{\lambda s}\int_{-\infty}^{s}\phi(s)e^{-\lambda s}ds & [s<0] \\ e^{\lambda s}\int_{-\infty}^{s}\phi(s)e^{-\lambda s}ds & [s>0] \end{cases} \quad R(\lambda)<0 \text{ ノトキ}$$

トナル。 $h_\lambda(s)\to 0$ （$|s|\to\infty$ ノトキ）ナルコト＝注意シテ進ンデ次ノ結果＝至ル。

<u>$R(\lambda)>0$, $s<0$ トスレバ</u>

$$(28)\quad h_\lambda(s)=-\sum_{\nu=1}^{m+1}\frac{\phi_*^{(m+1-\nu)}(s)}{\lambda^\nu}+\frac{e^{\lambda s}}{\lambda^{m+1}}\int_s^{\infty}\phi(\tau)e^{-\lambda\tau}d\tau$$

<u>$R(\lambda)>0$, $s>0$ トスレバ</u>

$$(29)\quad h_\lambda(s)=(-1)^{m+1}\frac{e^{-\lambda s}}{\lambda^m}-\sum_{\nu=1}^{m+1}\frac{\phi_*^{(m+1-\nu)}(s)}{\lambda^\nu}+\frac{e^{\lambda s}}{\lambda^{m+1}}\int_s^{\infty}\phi(\tau)e^{-\lambda\tau}d\tau$$

<u>$R(\lambda)<0$, $s<0$ トスレバ</u>

$$(30)\quad h_\lambda(s)=(-1)^{m}\frac{e^{-\lambda s}}{\lambda^m}-\sum_{\nu=1}^{m+1}\frac{\phi_{**}^{(m+1-\nu)}(s)}{\lambda^\nu}+\frac{e^{\lambda s}}{\lambda^{m+1}}\int_{-\infty}^{s}\phi(\tau)e^{-\lambda\tau}d\tau$$

<u>$R(\lambda)<0$, $s>0$ トスレバ</u>

$$(31)\quad h_\lambda(s) = -\sum_{\nu=1}^{m+1} \frac{\phi_{**}^{(m+1-\nu)}(s)}{\lambda^\nu} + \frac{e^{\lambda s}}{\lambda^{m+1}}\int_{-\infty}^{s} \phi(\tau)\, e^{-\lambda\tau}\, d\tau$$

トナル。 (28) ― (31) ヲバ，(20) ニ代入スル。然ルトキ

$$(32)\quad \mathrm{T}(x, 0\,;\, \rho) \equiv \frac{1}{2\pi i}\oint_{C} \frac{e^{\lambda x}}{G(\lambda)\lambda^{m}}\, d\lambda$$

トナル。

C ヲ今、原点ヲ中心トシ，半径 1 ヨリ小ナル円周トスルトキ

$$(33)\quad \mathrm{T}(x, 0\,;\, \rho) = B_{m-k}^{k}(x)$$

トナルコトヲ (32) ハ示シテヰル。 0 < x < 1 ノトキデアル。

(33) ト (19) トカラモトメツト、即チ (18) ヲ結論シウル。