558. 空間曲線ノ射影微分幾何學ニ於ケル *extrémales* ニ就テ

金原　誠（旅順工大豫科）

空間曲線ガ *paramètre* u ヲ用ヒテ表ハサレテヰルトキ，ソノ曲線上ノ1点ヲ x トシ，x_1，x_2，x_3 ヲ適當ニ選ンデ4点 x, x_1, x_2, x_3 ヲ頂点トスル四面体ヲ *repère fondamental* ニ取レバ曲線ノ基本方程式ハ

$$
(1)\quad \begin{cases}
\dfrac{dx}{du}=x_1, \\[2mm]
\dfrac{dx_1}{du}=3kx+hx_1+x_2, \\[2mm]
\dfrac{dx_2}{du}=\nu x+3kx_1+2hx_2+x_3, \\[2mm]
\dfrac{dx_3}{du}=\rho x+\nu x_1+3kx_2+3hx_3
\end{cases}
$$

ト書クコトガ出來テ

$$\nu\, du^3,\quad \rho\, du^4$$

ハ *invariantes et intrinsèques* デアル、コレハ蟹谷教授ニヨッテ導カレ，夫々曲線ノ第一種及ビ第二種ノ射影的線元素ト稱セラレテヰル。[註1]

平面曲線ノ射影的線元素ハ古ク *Halphen* ニヨッテ定メラレ，コレニ関スル *extrémales* ハ *Cartan* ニヨッテ研究セラレタ。[註2] *Cartan* ノ方法ヲ用ヒテ

$$\int \sqrt[3]{\nu}\, du,\quad \int \sqrt[4]{\rho}\, du$$

ノ *extrémales* ヲ求メルノガコノ *article* ノ目的デアル。

I

1. 今 $\tau=\int\sqrt[3]{V}\,du$ ト置キ，x＝適當ナ *facteur* ヲ掛ケレバ (1) ハ次ノヤウニ書クコトガ出來ル。

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau}=x_1, \\[2mm] \dfrac{dx_1}{d\tau}=3Kx+x_2, \\[2mm] \dfrac{dx_2}{d\tau}=x+3Kx_1+x_3, \\[2mm] \dfrac{dx_3}{d\tau}=Rx+x_1+3Kx_2 \end{cases}$$

コヽニ K ハ坪光氏ノ射影的曲率ニ常數ヲ掛ケタモノデアリ，(註3)

$$R=\frac{\rho\,du^4}{(V\,du^3)^{\frac{4}{3}}}$$

デアツテ共ニ *invariantes et intrinsèques* デアル。

2. コヽニ一群ノ曲線ヲ考ヘ，ソノ各曲線上ノ各点ニ上ニ定メタ *repère* ヲ *attacher* スル、然ルトキハ x, x_1, x_2, x_3 ハ多クノ *paramètres* ニ *dépendantes* ニナリ

$$(3)\quad dx_i=\omega_i^0 x+\omega_i^1 x_1+\omega_i^2 x_2+\omega_i^3 x_3,$$

$$(i=0,1,2,3;\ x_0\equiv x)$$

ト書クコトガ出來ル、又互ニ交換可能ナ微分記號 d 及ビ δ ヲ用ヒレバ射影空間ノ *équations de structure* ハ

$$(4)\quad d\omega_i^j(\delta)-\delta\omega_i^j(d)$$
$$=\sum_k\left[\omega_i^k(d)\,\omega_k^j(\delta)-\omega_i^k(\delta)\,\omega_k^j(d)\right]$$

トナル、但シコヽニ ω_i^j ハ *Pfaff* ノ記號デ *paramètres* ノ微分ニ關スル一次式ヲ表ハスモノトスル、尚 x, x_1, x_2, x_3 ニ共通ナ *facteur* ヲ掛ケテ

$$(5)\quad \sum_\sigma \omega_\sigma^\sigma=0$$

トナルヤウニシテオク。

此ノ結果ヲ我々ノ問題ニ用ヒル。$\int d\tau$ ノ一ツノ *extrémale* ヲ Γ トシ、Γ ハ任意ノ數ノ *paramètres* ニ *dépendantes* ナ曲線群ニ屬スルモノトスル、コノ曲線群ノ各曲線ノ各點ニ上ニ定メタ *repère* ヲ *attacher* スレバ ω_i^j ハ τ 及ビ *paramètres* ノ微分ニ關スル一次式トナル。簡單ノタメニ曲線ニ沿ッテノ *déplacement* ヲ d, *paramètres* ノミニヨル *déplacement* ヲ δ デ表ハスコトトシ

$$\omega_i^j(d)=\omega_i^j,\quad \omega_i^j(\delta)=e_i^j$$

ト書クコトニスレバ (4) ハ

$$(6)\quad \delta\omega_i^j-de_i^j=\sum_k\left[e_i^k\omega_k^j-\omega_i^k e_k^j\right]$$

トナル。

今曲線群ノ曲線ノ任意ノ一ツニ沿ッテ *déplace* サセレバ(2)ニヨッテ

$$(7)\quad \begin{cases} \omega_0^0=0,\ \omega_0^1=d\tau,\ \omega_0^2=0,\ \omega_0^3=0, \\ \omega_1^0=\omega_2^1=\omega_3^2,\ \ \omega_1^1=0,\ \ \omega_1^2=\omega_0^1,\ \omega_1^3=0, \\ \omega_2^0=\omega_0^1,\ \ \omega_2^2=0,\ \ \omega_2^3=\omega_0^1, \\ \omega_3^0=R\omega_0^1,\ \ \omega_3^1=\omega_0^1,\ \ \omega_3^2=3K\omega_0^1,\ \ \omega_3^3=0. \end{cases}$$

3. (6) ニ於テ $i=0,\ j=1$ トオケバ

$$\delta\omega_0^1-de_0^1=\sum_k\left[e_0^k\omega_k^1-\omega_0^k e_k^1\right]$$

$$=(e_0^0-e_1^1+e_0^3+3Ke_0^2)\,d\tau$$

シタガッテ

$$\delta\int d\tau=\delta\int\omega_0^1=\int\delta\omega_0^1=\int(e_0^{1\prime}+e_0^0-e_1^1+e_0^3+3Ke_0^2)\,d\tau,$$

$$\left(e_0^{1\prime}=\frac{de_0^1}{d\tau}\right).$$

故ニ $\int d\tau$ ノ *extrèmales* ハ

$$(8)\quad \int(e_0^{1\prime}+e_0^0-e_1^1+e_0^3+3Ke_0^2)\,d\tau=0$$

ヲ満足スル。

(6) ト (7) トヲ用ヒテ計算スレバ

$$(9)\quad e_0^0-e_1^1+e_0^3+3Ke_0^2$$

$$=-\frac{1}{6}(2e_0^1-e_2^0-e_3^1)'+\frac{2}{3}e_0^{2\prime\prime}+\frac{1}{6}e_0^{3\prime\prime\prime}$$

$$+\left\{\frac{3}{2}KK'e_0^{2}+\left(\frac{R}{3}+\frac{9}{2}K^2\right)e_0^{2\prime}-\frac{1}{2}Ke_0^{2\prime\prime\prime}\right\}$$

$$+\left\{K'e_0^{3}+\left(\frac{5}{2}K+\frac{3}{4}KK'\right)e_0^{3\prime}+\left(\frac{R}{6}+\frac{9}{4}K^2\right)e_0^{3\prime\prime}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}Ke_0^{3\,\mathrm{IV}}\right\}.$$

コレヲ(8)ニ代入シテ部分積分法ヲ数回行ヘバ積分出来タ部分ト

$$\int\Big[\left(\frac{1}{2}K'''-\frac{15}{2}KK'-\frac{1}{3}R'\right)e_0^{2}$$

$$+\left(-\frac{1}{4}K^{\mathrm{IV}}+\frac{15}{4}KK''+\frac{15}{4}K'^2-\frac{3}{2}K'+\frac{R''}{6}\right)e_0^{3}\Big]d\tau$$

トナル。e_0^2 ト e_0^3 トハ独立デアルカラ求ムル *extrémales* ノ自然方程式ハ

$$(10)\quad\begin{cases}K'''-15KK'=\dfrac{2}{3}R',\\[2mm] K^{\mathrm{IV}}-15KK''-15K'^2+6K'=\dfrac{2}{3}R''.\end{cases}$$

シタガッテ　$6K'=0$

故ニ

$$(11)\quad K=\mathit{const.},\qquad R=\mathit{const.}$$

即チ "$\int\sqrt[3]{v}\,du$ ノ *extrémales* ハ坪光氏ノ曲率及ビ第二種射影的線元素ト第一種射影的線元素ノ $\frac{4}{3}$ 乗ノ比ガ一定ナルW曲線デアル。"

シタガッテ今 X, Y, Z ヲ以テ曲線上ノ点ノ非斉次座標ヲ表ハスモノトスレバ, *transformation homographique* ニヨッテ

$$\begin{cases} Y = X^m \\ Z = X^n \end{cases}$$

及ビ其ノ他ノ形ニ導クコトガ出来，且ツ *un groupe homographique continu à un paramètre* ヲ *admet* スル。(註4)

II

4. (1) ニ於テ $\sigma = \int \sqrt[4]{\rho}\, du$ ト置キ，適当ナ *facteur* ヲ掛ケレバ

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{d\sigma} = x_1, \\[2ex] \dfrac{dx_1}{d\sigma} = 3Mx + x_2, \\[2ex] \dfrac{dx_2}{d\sigma} = Nx + 3Mx_1 + x_3, \\[2ex] \dfrac{dx_3}{d\sigma} = x + Nx_1 + 3Mx_2. \end{cases}$$

トナル、コヽニNハ

$$(13)\quad N = \frac{\nu\, du^3}{(\rho\, du^4)^{\frac{3}{4}}}$$

デアッテ Mト共ニ *invariantes et intrinsèques* デアル. $\int d\sigma$ ノ *extrémales* ヲ求メルタメニ I ト同様ナ方法ヲ用ヒル、今ノ場合ニハ (12) ニヨッテ次ノ関係ヲ得ル。

$$
(14)\quad \begin{cases}
\omega_0^0=0, & \omega_0^1=d\sigma, \quad \omega_0^2=0, \quad \omega_0^3=0,\\
\omega_1^0=\omega_2^1-\omega_3^2, & \omega_1^1=0, \quad \omega_1^2=\omega_0^1, \quad \omega_1^3=0,\\
\omega_2^0=\omega_3^1, & \omega_2^2=0, \quad \omega_2^3=\omega_0^1,\\
\omega_3^0=\omega_0^1, & \omega_3^1=N\omega_0^1, \quad \omega_3^2=3M\omega_0^1, \quad \omega_3^3=0.
\end{cases}
$$

(6)ニ於テ $i=0$, $j=1$ ト置キ (14)ヲ用ヒレバ $\int d\sigma$ ノ extrémales ハ

$$
(15)\quad \delta\int d\sigma=\int\left(e_0^{1'}+e_0^0-e_1^1+3Me_0^2+Ne_0^3\right)d\sigma=0,
$$

$$
\left(e_0^{1'}=\frac{de_0^1}{d\sigma}\right).
$$

ヲ満足スルコトガワカル。(6)ト(14)トヲ用ヒテ計算スレバ

$$
(16)\quad e_0^0-e_1^1+3Me_0^2+Ne_0^3=-\frac{1}{4}\left(e_0^1-e_3^0\right)'+\frac{3}{4}M\left(e_3^1-e_2^0\right)
$$
$$
+\frac{1}{4}N\left(e_3^2-e_1^0\right)+\frac{3}{4}e_0^{2''}+\frac{3}{4}M'e_0^3+\frac{3}{4}Me_0^{3'}
$$
$$
+\frac{1}{4}e_0^{3'''}.
$$

コレヲ(15)ニ代入スレバ積分出来ヌ部分ト

$$
\int\left[\frac{3}{4}M\left(e_3^1-e_2^0\right)+\frac{1}{4}N\left(e_3^2-e_1^0\right)\right]d\sigma
$$

トナル。$e_3^1-e_2^0$ ト $e_3^2-e_1^0$ トハ独立デアルカラ extrémales ノ自然方程式ハ

$$
(17)\quad M=0, \qquad N=0.
$$

然ルニ $N=0$ ナルトキハ曲線ノ凡テノ切線ガ un complexe linéaire ニ属スル。(註5) 故ニ "$\int\sqrt[4]{\rho}\,du$ ノ extrémales ハソノ切線ガ un complexe linéaire ニ属スル W 曲線デアル。"

尚コノ場合ニハ曲線ノ微分方程式ハ

$$\frac{d^4 x}{d\sigma^4} = x$$

トナルカラ, X, Y, Z ヲ以テ曲線上ノ点ノ非斉次座標ヲ表ハスコトニスレバ *transformation homographique* ニヨツテ曲線ノ方程式ハ

$$\begin{cases} Y = X^{\frac{1}{2}} \cos\left(-\frac{1}{2}\log X\right), \\ Z = X^{\frac{1}{2}} \sin\left(-\frac{1}{2}\log X\right). \end{cases}$$

ト書クコトガ出来ル。

(註1) J. Kanitani, Sur les repères mobiles attachés à une courbe gauche. (Mem. Ryojun Coll. Eng., VI, 1933, p. 91—113.)

(註2) É. Cartan, Sur un problème du calcul des variations en géométrie projective plane. (Recueil math. de la Soc. math. de Moscou, 34, 1927, p. 349—363)

(註3) M. Tsuboko, Sur la courbure projective d'une courbe. (Mem. Ryojun Coll. Eng., Inouye Comm. Volume, 1934, p. 59—74)

(註4) E. Wilczynski, Projective differential geometry of curves and ruled surfaces, p. 279.

(註5) J. Kanitani, loc. cit.