

# 555. 函数方程式

$$f(x, y) + f(x+y, z) = f(x, y+z) + f(y, x)$$

= 就イテ (IV)

角谷 静夫 (阪大)

(C) = ヨツテ (33) が成立スルコトがワカツタが更ニ精シク  $g(P, Q)$  の性質ヲ調べヨウ。

(d) 次ノニツノ場合ガアル。

(i)  $C(\pi) \neq 0$  ナルトキ。  $\pi$  上ニ一点  $O$  が存在シテ

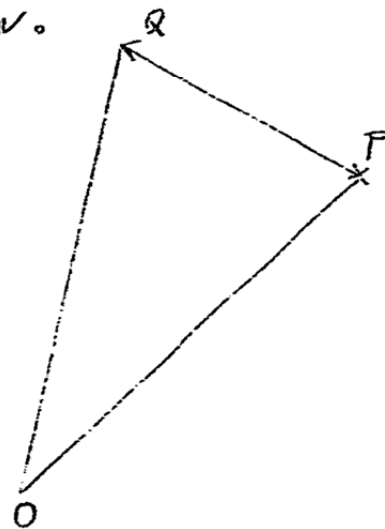
$$g(P, Q) = C(\pi) \cdot A(OPQ) \dots\dots\dots (34)$$

トナル。エゴ  $A(OPQ) = \Delta OPQ$  ノ面積デアル。

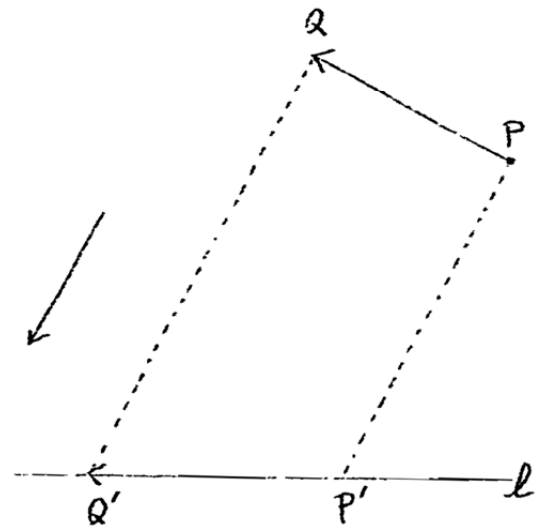
(ii)  $C(\pi) = 0$  ナルトキ。  $\pi$  上ニ一ツノ方向  $d$  が存在シテ  $P, Q$  ヲ  $d$  ノ方向ニ、 $d$  ト平行デアリ直線  $l$  上ニ射影シタ点ヲ  $P', Q'$  トスレバ

$$g(P, Q) = g(P', Q') \equiv C(l) \cdot L(\overrightarrow{P'Q'}) \dots\dots\dots (35)$$

トナツテキル。但シ  $L(\overrightarrow{P'Q'})$  ハ  $P'Q'$  ノ長さ (方向モ考ヘ入レタ) デアル。



(i) ノ場合



(ii) ノ場合

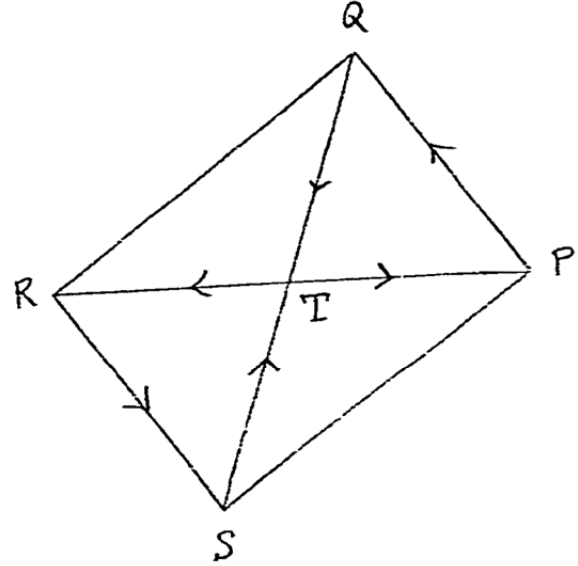
(ii) ハ (i) = 於テ  $O$  が  $\infty$  = ナツタ時デアルト考ヘルコトが出来ル。又  $g(P, Q)$  が恒等的 =  $O$  トナルトキハ (34), (35) ノ何レが成立スルト考ヘテモ差支ヘナイ。

証明:  $\pi$  上 = 任意ノ矩形  $\square = PQRS$  ヲ考ヘル。

$$PQ = SR = a,$$

$$QR = PS = b$$

トシ  $PR$  ト  $QS$  トノ交点ヲ  $T$  トスレバ



$$\Omega(PQT) + \Omega(RST)$$

$$= c(\pi) \cdot \frac{ab}{4} + c(\pi) \cdot \frac{ab}{4} = c(\pi) \cdot \frac{ab}{2}$$

デアル。然ルニ

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= g(P, Q) + g(Q, T) + g(T, P) \\ &\quad + g(R, S) + g(S, T) + g(T, R) \end{aligned}$$

デアリツ (2) ヲリ

$$g(Q, T) + g(S, T) = 0$$

$$g(T, P) + g(T, R) = 0$$

デアルカラ

$$g(P, Q) - g(S, R) = c(\pi) \cdot \frac{a \cdot b}{2}$$

トナル。今  $P, Q$  ヲ通ル直線ヲ  $l$ ,  $S, R$  ヲ通ル直線ヲ  $l'$  トスレバコレヨリ

$$a \cdot c(l) - a \cdot c(l') = c(\pi) \cdot \frac{a \cdot b}{2}$$

即チ

$$c(l) - c(l') = \frac{c(\pi)}{2} \cdot b$$

ヲ得ル。ヨツテ次ノ結果ヲ得ル。

コレハ一ツノ直線  $l_0$  = 平行ナ直線  $l$  = 内スル  $c(l)$  が  $l$  ト  $l_0$  トノ距離 = 比例シテ変化スルコトヲ意味スル。シカモソノ比例ノ常数ハ各方向 = 對シテ一定デ  $\frac{c(\pi)}{2}$  = ヒトシイ。

次 =  $c(\pi) \neq 0$  ナルトキト  $c(\pi) = 0$  ナルトキト = ワケテ考ヘル。

(I)  $c(\pi) \neq 0$  ナルトキ。

任意ノ方向ノ直線  $l_0$  = 對シテ、コレト平行デ且ツ

$c(l) = 0$  トナル如キ直線  $l$  が存在スル、(コレヲ作ルタメニハ  $l_0$  ト平行デ  $l_0$  トノ距離が  $-\frac{2c(l_0)}{c(\pi)}$  ナル直線ヲトレバヨイ。)

トコロが各方向 = 對スルコノヤウナ直線ハ一定点  $O$  ヲ通ラネバナラナイ。何トナレバ若シサウデナケレバ一トヲ通ラナイニツノ直線  $l_1, l_2, l_3$  = テ、何レノニツモ互ニ平行デナク且ツ  $c(l_1) = c(l_2) = c(l_3) = 0$  トナルモノが存在スル。

$l_1, l_2, l_3$  ノ作ル三角形  $PQR$  ヲ考ヘルバ  $c(\pi) \neq 0$  ヨリ  $\delta_B(PQR) \neq 0$  トナラネバナラナイガ一方  $\delta_B(PQR) = g(P, Q) + g(Q, R) + g(R, P)$  ナ右辺ハ  $c(l_1) = c(l_2) = c(l_3) = 0$  ヨリ  $0$  トナラネバナラヌカラ矛盾デアアル。

此ノ如ク一ト一定点  $O$  が存在シテ  $O$  ヲ通ル任意ノ直線  $l$  = 對シテ  $c(l) = 0$  トナルコトがワカル。  $g(Q, O) = g(O, P) = 0$

デアルカラ

$$g(P, Q) = g(O, P) + g(P, Q) + g(Q, O) \\ = \Omega(OPQ) = c(\pi) \cdot A(OPQ)$$

トナル。即チ (34) が成立スル。

(II)  $c(\pi) = 0$  ナルトキ。

コノトキハ互ニ平行ナニツノ直線  $l, l' =$  對シテ

$c(l) = c(l')$  デアル。

今三角形  $PQR$  ヲ考ヘレバ

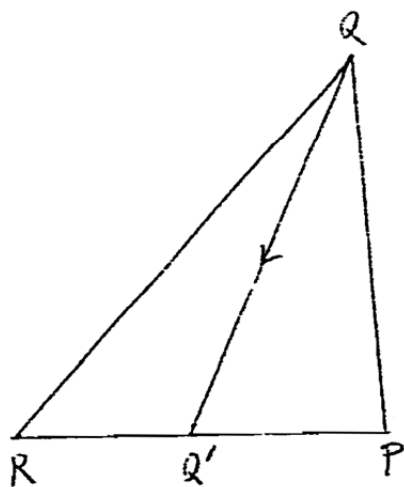
$$\Omega(PQR) = 0 \text{ ヲリ}$$

$$g(P, Q) + g(Q, R) = g(P, R)$$

ヲ得ル。  $PR$  上ニ  $Q'$  ヲ

$$g(P, Q') = g(P, Q)$$

(從ツテ又  $g(Q', R) = g(Q, R)$ )



ナル如クトレバ  $\Omega(PQQ') = 0$  ナルコトカラ

$$g(Q, Q') = 0$$

トナル。ヨツテ  $\overrightarrow{QQ'}$  = 平行ナ直線  $l' =$  關シテ  $c(l') = 0$  デアル。故ニ  $QQ'$  ノ方向ヲ  $d$  トスレバ、コレガ (ii) ノ條件ヲ満足スルコトハ容易ニワカル。何トナレバ  $d$  ト平行デナイ直線  $l$  ヲトリ、 $l$  上ニ  $P, Q$  ヲ  $d$  ノ方向ニ project シテ点ヲ大々  $P', Q'$  トスレバ  $c(\pi) = 0$  ヲリ

$$0 = \Omega(PQQ'P') = g(P, Q) + g(Q, Q') + g(Q', P') + g(P', P)$$

然ルニ  $\overrightarrow{QQ'}, \overrightarrow{PP'}$  ハ  $d$  = 平行デアルカラ  $g(Q, Q') = g(P', P) = 0$

トナリ、シテガツテ

$$g(P, Q) = g(P', Q') = c(l) \cdot L(\overrightarrow{P'Q'}) \text{ ----- (35)}$$

トナル。

(e)  $R_{n-1}$  内、直線  $l = \tau$   $c(l) = 0$  ナル  $\epsilon$ 、全体ノ  
集合ヲ  $\Gamma$  トスル。(d) デ考ヘテコトヨリ  $R_{n-1}$  内ノ二次元  
ノ平面  $\pi$  上デハ  $\Gamma$  ハ一点  $O(\pi)$  ヲ通ル直線全体カ又ハ平行  
線全体 = ナツテキル。後、場合 = ハ  $O(\pi)$  ハ  $\infty$  = アルト考  
ヘルコトガ出来ル。カナル直線ノ集合ハ射影幾何學デ論ツテ  
レテキル。