554. 線状函数方程式ニ就イテ(III)

北川　敏男(阪大)

5. Valiron ノ方法. 函数方程式

(1) $\Gamma f(x) = 0$

ニ於テ $\Gamma j(\lambda x) = G(\lambda) j(\lambda x)$ ニヨッテ定義サレル母函数

(2) $G(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lambda^n$

ヲバ次数 1, mean type ノ整函数デアルトスル。

$f(x) \in (B^{(\infty)})$ ガアリ且ツ或ル範囲ニ於テ解析的デアルトシテ (1) ニ関シテ、無限次微分方程式ニ於ケル Valiron ノ方法ヲ試ミテ見ヨウ。ソノタメ次ノ準備ガ必要デアル。

定義1.[1] $\{U_n(z)\}$ ナルzノ整函数ノ系列ガアッテ

(3.1) $U_0(z) = 1, \quad \mathcal{O}U_0(z) = 0$

(3.2) $\mathcal{O}U_n(z) = U_{n-1}(z) \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$

ヲ満足スルトキコレヲ $\mathcal{O}$ ノ基本函数系トイフ。

例. 特ニ $\mathcal{O}f(z) \equiv \dfrac{df(z)}{dz}$ ナラバ $U_n(z) = \dfrac{z^n}{n!}$

定義2.[2] 特ニ次ノ條件ヲ満足スル $\mathcal{O}$ ノ基本函数系ヲバ Widder 型デアルトイフ。乃チ

---

(1) 一般ノ Transmutation ニ於テ基本函数系ヲ考ヘルコトハ既ニ Flamant Rend. Palermo, 54 (1930) ガ試ミテ居ル。

(2) Widder, Trans. Am. Math. Soc. 35 (1933) Sheffer, Am. Journ. Math. 57 (1935) 特 p.594—597.

(4.1) $$u_n(z) = \frac{z^n}{n!}\left(1 + h_n(z)\right)$$

(4.2) $$\max_{|z| \leqq R} |h_n(z)| = \lambda_n(R)$$

トオクトキ，スベテノ R ニ關シテ常ニ

(4.3) $$(0 \leqq) \ \underset{n}{l.u.b.}\ \lambda_n(R) = K(R) < \infty$$

定理 (Sheffer)[1] $\{u_n(z)\}$ ガ Widder 型基本函數系デアル場合ニハ

(5) $$n!/t^{n+1} = L_0(t)\,h_0^{(n)}(0) + L_1(t)\binom{n}{1}h_1^{(n-1)}(0) + \cdots\cdots + L_{n-1}(t)\binom{n}{n-1}h'_{n-1}(0) + L_n(t)$$

ニ由リ、漸次 $L_n(t)$ $(n=0, 1, 2, \cdots\cdots)$ ヲ定義スルトキ $|t| \geqq \rho$ ニ對シテ一様ニ次ノ關係ガナリタツ。但シ $\rho = \min(r, R)$ トスル。即チ

(6) $$|L_n(t)| \leqq \frac{n!}{\rho^{n+1}}\left(1 + K(R)\right)^n$$

正則函數ト ϑ トノ關係トシテ吾人ハ次ノ事ヲ假定スル。

假定 R. $f(z)$ ガ或ル領域 S デ正則デアルナラバ，ソノ領域ニ含マレル任意ノ閉領域 S' ニ於テ $f(z) \in (B^{(\rho)})$ デアリ，且ツ S デ $f_n(z) \Rightarrow f(z)$ ナラバ，S' デ $\vartheta^k f_n(z) \Rightarrow \vartheta^k f(z)$ $(k = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$

然ルトキ吾々ハ次ノ如ク進ム事ガ出來ル。

---

(1) Sheffer, loc. cit. p 597. lemma 3 ニ含マレテヰル。

(2) Sheffer, loc. cit. p. 597. Theorem 4 參照。此ノ目的デ $k=0$ ニ相當シタコトガ證明サレテヰル。

定理6[2]　$\sum_{n=k}^{\infty} L_n(w)\, u_{n-k}(z)$ ナル級数ヲ形式的ニ考ヘル, コヽニ $|z| \leqq R$ トスル. 然ルトキニハ, r ヲ任意ノ正数トシ, $\rho = \min(r, R)$, $l \leqq \dfrac{\rho}{\mathbb{K}(R)+1}$ トスルトキ $|z| \leqq l$, $|w| \geqq r$ ニ於テ一様ニ收斂シテ

$$(8)\qquad \mathcal{D}_z^{k}\left[\frac{1}{w-z}\right] = \sum_{n=k}^{\infty} L_n(w)\, u_{n-k}(z)$$

トナル。而シテ

$$(9)\qquad \left|\sum_{n=k}^{\infty} L_n(w)\, u_{n-k}(z)\right| \leqq (1+\mathbb{K}(R))\, \rho\, k! \left(\frac{1+\mathbb{K}(R)}{\rho-|z|(1+\mathbb{K}(R))}\right)^{k+1}$$

証明:

$$(10)\qquad \left|L_n(w)\, u_{n-k}(z)\right| \leqq \left|L_n(w) \frac{z^{n-k}}{(n-k)!}(1+h_{n-k}(z))\right|$$

$$\leqq \frac{n!}{(n-k)!}(1+\mathbb{K}(R))^{n+2} \frac{|z|^{n-k}}{\rho^{n}}$$

依ッテ考ヘル級数ノ優級数トシテ

$$(11)\qquad \frac{1}{\rho^{k}} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(1+\mathbb{K}(R))^{n+2}}{(n-k)!}\, n! \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^{n-k}$$

ヲ與ヘルコトが出來ル。コレハ

$$(12)\qquad \frac{(1+\mathbb{K})^{2+k}\, k!}{\rho^{k}} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!\, k!} \left(\frac{z}{\rho}\right)^{n-k} (1+\mathbb{K})^{n-k}$$

ニ等シイ故、コレカラスベテ求メル事柄ヲ結論シウル.

定理7. $g(z)$ が $|z-z_0| < (1+\mathbb{K}(h))(\Gamma+h)\ (h>0)$ デ正則デアルトスル。

然ルトキニハ

$$(13)\qquad \Gamma g(z)=C_0 g(z)+C_1\mathcal{D}g(z)+\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots+C_n\mathcal{D}^n g(z)+\cdots\cdots\cdots$$

ハ $|z-z_0|<h$ デ定義セラレ且ツソコデ正則デアル。

証明. Cauchy ノ積分表示ニ上述 (7) ヲ代入スルトキ

$$(14)\qquad \mathcal{D}^k g(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C g(w)\sum_{n=s}^{\infty}L_n(w)\mathcal{D}^k u_n(z)\,dw$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C g(w)\sum_{n=k}^{\infty}L_n(w)u_{n-k}(z)\,dw$$

茲ニ於テ

$$(15)\qquad \sum_{k=0}^{\infty}|C_k|\left|\sum_{n=k}^{\infty}L_n(w)u_{n-k}(z)\right|$$

ヲ考ヘル。コレニ對シテ次ノモノガ majorant ニナル。

$$\left(1+K(h)\right)\rho\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\Gamma+\varepsilon)^k}{k!}k!\left(\frac{1+K(h)}{\rho-|z|(1+K(h))}\right)^{k+1}$$
$$=\frac{(1+K(h))^2\rho}{\rho-|z|(1+K(h))}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{(\Gamma+\varepsilon)(1+K(h))}{\rho-|z|(1+K(h))}\right|^{k+1}$$

コレカラ求メル結果ヲウル。

以上ノコトガ成立スル以上 Valiron ノ方法[1] ノ一般化ハ容易デアル。

---

(1) G. Valiron, Sur les solutions des équations différentielles linéaires d'ordre inf. et a coeff. const. Ann. d. l'Ecole Norm. 3 Tome 46 (1929)

定理 8. $f(z)$ ヲバ $|z-z_0|<(D+\beta)(1+K(h))+h$ ニ於テ正則ナル, 函数方程式 (1) ノ解デアルトスル。然ルトキニハ $|z-z_0|<h$ ニ於テ一様ニ

$$(16)\qquad f(z)=\lim_{m=\infty} G\left[e^{-\beta_m\vartheta}f(z);1,2,\cdots\cdots,m\right]$$

デアル。

(註)

$$G(\lambda)=\lim_{m=\infty} e^{\beta_m\lambda}\prod_{n=1}^{m}\left(1-\frac{\lambda}{a_n}\right),\ \beta_m=\alpha+\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{a_n}$$

$\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\,\beta_m=\beta$ ニヨッテ β ヲ定義スル。常数 D モ $G(\lambda)$ ノミニ depend スル。(Valiron, loc. cit. p.32)

$$P(\lambda;1,2,\cdots\cdots,m)\equiv\prod_{n=1}^{m}\left(1-\frac{\lambda}{a_n}\right),\ G(\lambda;1,2,\cdots m)$$

$$=G(\lambda)\Big/P(\lambda;1,\cdots\cdots,n)$$

トオク。コレニ對應シテ $P(\vartheta;1,2,\cdots\cdots,n)$, $G(\vartheta;1,2,\cdots n)$ ナル Operator ヲ考ヘル。

6. 吾々ノ取扱ヒ來ッタ Contour-integral ニツイテ Valiron ノ方法ヲ interpretate スルノガ本節ノ目的デアル。

$$S_r(z;0;f)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r}\frac{j(\lambda z)}{G(\lambda)}\Gamma\left(\alpha_\lambda(f(x)\right)d\lambda$$

C_r ノ内部ニハ $a_1, a_2,\cdots\cdots, a_m$ ナル零点ガアルトシ, 両辺ニ対シテ $G(\vartheta;1,2,\cdots\cdots,n)e^{-\beta_m\vartheta}$ ヲ施ス。然ルトキニハ

$$(17)\qquad G\left[e^{-\beta_m\vartheta}S_r(x;0;f);1,2,\cdots\cdots,m\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathfrak{C}_n}\frac{j(\lambda z)}{e^{\beta_m\lambda}P(\lambda;1,2,\cdots\cdots,n)}\,\underset{0}{\Gamma}\,(\mathcal{L}_\lambda(f(x))\,d\lambda$$

然ルニ,

$$(18)\quad \Gamma(\mathcal{L}_\lambda(f(x))$$
$$=P(\vartheta;1,2,\cdots\cdots,m)\,e^{+\beta_m\vartheta}\left[e^{-\beta_m\vartheta}G(\vartheta;1,2,\cdots,m)(\mathcal{L}_\lambda(f(x)))\right]$$

他方ニ於テ次ノ補助定理ヲ準備スル。

補助定理 1. $f(z)\in(B^{(\infty)})(\mathcal{L}_\lambda(f(x))\in(B^{(\infty)})$ トスル。然ルトキ

$$(19)\quad \vartheta^n\mathcal{L}_\lambda(f(x))=\mathcal{L}_\lambda(\vartheta^n f(x))+(\vartheta^n\mathcal{L}(f(x)))_0\,j(\lambda x)$$

証明:

$$\vartheta\mathcal{L}_\lambda(f(x))=\lambda\mathcal{L}_\lambda(f(x))+f(x)$$

ニ對シテ ϑ^n ヲ施ス。他方ニ於テ

$$\vartheta\mathcal{L}_\lambda(\vartheta^n f(x))=\lambda\mathcal{L}_\lambda(\vartheta^n f(x))+\vartheta^n f(x)$$

依ッテ

$$(*)\quad \vartheta\left[\vartheta^n\mathcal{L}_\lambda(f(x))-\mathcal{L}_\lambda(\vartheta^n f(x))\right]$$
$$=\lambda\left[\vartheta^n\mathcal{L}_\lambda(f(x))-\mathcal{L}_\lambda(\vartheta^n f(x))\right]$$

而シテ

$$\vartheta^n\mathcal{L}_\lambda(f(x))-\mathcal{L}_\lambda(\vartheta^n f(x))-(\vartheta^n\mathcal{L}_\lambda(f(x)))_0\,j(\lambda x)$$

ハ (C) ニ屬シ, 上ノ関係(*)ヲミタス。ヨッテソレハ恒等的ニ零デナケレバナラナイ。

補助定理 2.

$$(20)\quad \begin{aligned}&e^{-\beta_m\vartheta}G(\vartheta;1,2,\cdots\cdots,m)\,\mathcal{L}_\lambda(f(x))\\&=\mathcal{L}_\lambda(e^{-\beta_m\vartheta}G(\vartheta;1,2,\cdots\cdots,m)f(x))\\&+(e^{-\beta_m\vartheta}G(\vartheta;1,2,\cdots,m)\,\mathcal{L}_\lambda(f(x)))_0\,j(\lambda x)\end{aligned}$$

(19) ト (20) トヲ結合スルトキ

(21) $\Gamma(\mathcal{L}_\lambda(f(x)))$

$$= P(\vartheta;1,2,\cdots\cdots,m)e^{\beta_m\vartheta}\{\mathcal{L}_\lambda(e^{-\beta_m\vartheta}G(\vartheta;1,\cdots,m)f(x))\}$$
$$+(e^{-\beta_m\vartheta}G(\vartheta;1,2,\cdots\cdots,m)\mathcal{L}_\lambda(f(x)))_0 P(\lambda;1,\cdots,m)j(\lambda x)$$

(17)ニ代入シテ

$$G[e^{-\beta_m\vartheta}S_p(z,0;f);1,2,\cdots\cdots,m]$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathfrak{C}_r}\frac{j(\lambda z)}{e^{\beta_m\lambda}p(\lambda;1,2,\cdots\cdots,m)}\underbrace{P(D;1,\cdots\cdots m)e^{\beta_m\vartheta}}_{0}\{\mathcal{L}_\lambda(e^{-\beta_m\vartheta}G(\vartheta;1,$$
$$\cdots\cdots\cdots,m)f(x)))\}d\lambda$$

$$=e^{-\beta_m\vartheta}G(\vartheta;1,\cdots\cdots,m)f(z)$$

$$=G[e^{-\beta_m\vartheta}f(z);1,2,\cdots\cdots\cdots,m]$$

然ルニ、(16)ヲ用ヒルトキ

(22) $$\lim_{m\to\infty}G[e^{-\beta_m\vartheta}S_p(z,0;f);1,2,\cdots\cdots,m]$$
$$=f(z)$$

ニナル、ソコデ

$$\lim_{m\to\infty}S_p(z,0;f)=S(z,0;f)$$

ガ存在スルトキニハ

$$S(z,0;f)=f(z)$$

トナル。コレガ Valiron ノ定理 XVI (loc. cit. p. 41) ニ相當スルノデアル。