553. Nulldimensionaler Kompaktum ノ Abbildungstheorie, (其ノ三)

中澤 武雄 (東京文理大)

前回ノ續キデアリマス。

Kompaktum ニ關スル Homöomorphiesatz ト Fixpunktsatz ハ Topologie 多年ノ懸案デアッテ極ク特殊ノ場合[1]ヲ除イテ一般ニハ未ダ解カレテヰナイ。以下ニ私ハ abzählbarer Kompaktum ノ Homöomorphiesatz ト nulldimensionaler Kompaktum ノ Fixpunktsatz ヲ述ベル。

之レヨリソレモ極リ特殊ノ場合デアリ、方法モ特殊ノ方

---

(1) Fläche ノ場合ハ両者トモ解決ズミ。Homöomorphiesatz ノ方ハ例ヘバ中村：位相幾何学（岩波），定理44。Fixpunktsatz ノ方ハ Nielsen, Geschlossene zweiseitige Fläche, Acta. Math. 50, 53。猶 Projektionsspektrum ノ Homöomorphiesatz ハ単ナル換言ニ外ナラヌ。

法デアルカラ n 次元ヲ解決スル何等ノヨスガニハナラナイケレドモ些カ問題発生ノ由来ト將来ヘノ希望ヲ述ベタ迄デアル。

I. Homöomorphiesatz

補助定理 1. 二ツノ abzählbarer Kompaktum A, B ガアリ、A ノ頂点ノ次数ガ B ノ頂点ノ次数ヨリ小ナリトスル。然レトキ B ノ適当ナ部分集合 A^* ガトレテ A^* ノ頂点ノ次数ト個数ガ夫々 A ノ頂点ノ次数ト個数ニ等シク且 A^* ガ B 内ニ於テ孤立シテ居ル（換言スレバ $\rho(A^*, B - A^*) > 0$）如クスルコトガデキル。コノ A^* ノコトヲ A ノ B 内ニ於ケル ausgezeichnetes Bild ト呼ブコトニスル。

証明. A ノ頂点ノ次数ヲ α, 個数ヲ n トスル。假定ヨリ $B^{(\alpha)}$ ハ有限ナラザル abzählbarer Kompaktum デアル。有限ナラザル abzählbarer Kompaktum ハ無限個ノ孤立点ヲ有ス。從ツテ $B^{(\alpha)}$ ノ中カラ任意ニ n 個ノ孤立点 $x_1, \cdots\cdots, x_n$ ヲ取リ出ス。$\rho(x_i, B^{(\alpha)} - x_i) = \varepsilon_i$ トシ B ニ関スル x_i ノ ε_i-ausgezeichnete Umgebung ヲ作リ，$(i = 1, \cdots\cdots, n)$，ソノ総和ヲ A^* トスル。然ラバ A^* ノ頂点ハ $x_1, \cdots\cdots, x_n$ デアルカラ次数ハ α, 個数ハ n, 從ツテ A ノ頂点ノ次数ト個数ニ一致スル。シカモ A^* ハ B 内ノ有限個ノ ausgezeichnete Umgebung ノ和デアルカラ明ラカニ B 内ニ於イテ孤立シテキル。

定理1（同形定理）．　二ツノ abzählbarer Kompaktum A, B ガ位相同形ナルタメニ必要十分ナル條件ハ両者ノ頂点ノ次数ト個数カソレゾレ相等シキコトデアル。

証明．(i) 必要ナルコト。

$A^{(\alpha)}$ ト $B^{(\alpha)}$ ガ寫像 f ニ依ッテ位相同形ナルトキハ $A^{(\alpha+1)}$ ト $B^{(\alpha+1)}$ モ f ニ依ッテ位相同形デアル。極限順序数 α ニ対シテ $\alpha>\beta$ ナル総テノ β ニ対シテ $A^{(\beta)}$ ト $B^{(\beta)}$ ガ f ニ依ッテ位相同形ナルトキハ $\prod_{\beta<\alpha} A^{(\beta)}=A^{\alpha}$ ト $\prod_{\beta<\alpha} B^{(\beta)}=B^{(\alpha)}$ モ f ニ依ッテ位相同形デアル，（以上デ帰納法終リ）。従ッテ A ノ頂点ノ次数ヲ α，個数ヲ n トスレバ $A^{(\alpha)}$ ト $B^{(\alpha)}$ ガ位相同形ナルコトヨリ $B^{(\alpha)}$ ハ n 個ノ点ノ集合デアル。従ッテ B ノ頂点ノ次数モ α デ個数モ n デアル。以上。

(ii) 十分ナルコト。

次数 α ニ関スル帰納法デアル。$\alpha=0$ ナルトキハ両者共有限集合デアルカラ個数相等シケレバ位相同形デアル。次ニ $\alpha>\beta$ ナル総テノ β ニツイテ成立ットスル。A ノ頂点ヲ $x_1, \cdots\cdots, x_n$，B ノ頂点ヲ $y_1, \cdots\cdots, y_n$ トシ A, B ヲ次ノ様ニ分割スル；

$$A=A_1+A_2+\cdots\cdots+A_n,\ A_i \ni x_i,\ \bar{A}_i=A_i,\ (i=1,\cdots\cdots,n),\ i\neq j \text{ ナラバ } A_i\cdot A_j=0.$$

$$B=B_1+B_2+\cdots\cdots+B_n,\ B_i \ni y_i,\ \bar{B}_i=B_i,\ (i=1,\cdots\cdots,n),\ i\neq j \text{ ナラバ } B_i\cdot B_j=0。$$

従ツテ A_i ト B_i ガ位相同形，$(i=1,\cdots\cdots,n)$ ナルコトガ云ヘレバヨイ。代表的ニ A_1 ト B_1 ニツイテヤル。A_1 ヲ A，B_1 ヲ B，x_1 ヲ x，y_1 ヲ y トカク。

0 ニ収斂スル ε_ν ヲトル。A ニ関スル x ノ ε_1-ausgezeichnete Umgebung ヲ U_1，$A-U_1=\mathfrak{F}_1$，$\mathfrak{F}_1$ ノ B 内ニ於ケル ausgezeichnetes Bild ヲ $\mathfrak{F}_1^*$，$B-\mathfrak{F}_1^*=B_1$ トスル。B_1 ニ関スル y ノ ε_2-ausgezeichnete Umgebung ヲ U_2，$B_1-U_2=\mathfrak{F}_2$，$\mathfrak{F}_2$ ノ U_1 内ニ於ケル ausgezeichnetes Bild ヲ $\mathfrak{F}_2^*$，$U_1-\mathfrak{F}_2^*=A_2$ トスル。A_{2m} ニ関スル x ノ ε_{2m+1}-ausgezeichnete Umgebung ヲ U_{2m+1}，$A_{2m}-U_{2m+1}=\mathfrak{F}_{2m+1}$，$\mathfrak{F}_{2m+1}$ ノ U_{2m} 内ニ於ケル ausgezeichnetes Bild ヲ $\mathfrak{F}_{2m+1}^*$，$U_{2m}-\mathfrak{F}_{2m+1}^*=B_{2m+1}$ トスル。B_{2m+1} ニ関スル y ノ ε_{2m+2}-ausgezeichnete Umgebung ヲ U_{2m+2}，$B_{2m+1}-U_{2m+2}=\mathfrak{F}_{2m+2}$，$\mathfrak{F}_{2m+2}$ ノ U_{2m+1} 内ニ於ケル ausgezeichnetes Bild ヲ $\mathfrak{F}_{2m+2}^*$，$U_{2m+1}-\mathfrak{F}_{2m+2}^*=A_{2m+2}$ トスル。

然ラバ $A=\mathfrak{F}_1+\mathfrak{F}_2^*+\mathfrak{F}_3+\cdots\cdots+x$，$B=\mathfrak{F}_1^*+\mathfrak{F}_2+\mathfrak{F}_3^*+\cdots\cdots+y$ ト夫々閉集合ノ直和ニ分解デキ帰納法ノ假定ニヨリ $\mathfrak{F}_\nu$ ト $\mathfrak{F}_\nu^*$ ハ位相同形デアル。シカモ

$$\lim_{\nu\to\infty}\mathfrak{F}_{2\nu-1}=\lim_{\nu\to\infty}\mathfrak{F}_{2\nu}^*=x,\quad \lim_{\nu\to\infty}\mathfrak{F}_{2\nu-1}^*=\lim_{\nu\to\infty}\mathfrak{F}_{2\nu}=y$$

ナル故 A ト B ハ位相同形デアル。　（証明終リ）

定義1. 1 カラ任意ノ順序数 α 迄ノ集合ヲ位相化スル。β ガ孤立順序数ナラ $U(\beta)=\beta$，極限順序数ナラ $\gamma<\beta$ ナル

任意ノ孤立順序数γカラβ迄ノ集合ヲ$U(\beta)$トスル。之レデ正則ナ位相集合ニナル。之ノ集合ガ第一可附番性公理ヲ満足スルコト，第二可附番性公理ヲ満足スルコト，計量可能ナルコトハ何レモ同値デαガ可附番順序数ナルコトガソノ必要十分條件デアル。

ソコデαガ可附番順序数ナルトキ之レヲ *wohlgeordneter Kompaktum* ト呼ビ記号デ$K(\alpha)$トカク。明ラカニ *abzählbarer Kompaktum* ノ一種デアル。

補助定理2. $K(\omega^\alpha\cdot n)$ノ頂点ノ次数ハαデ個数ハnデアル。

証明. $K(\omega^\alpha\cdot n)=\{1,\cdots\cdots,\omega^\alpha\}+\{\omega^\alpha+1,\cdots\cdots,\omega^\alpha\cdot 2\}+\cdots\cdots+\{\omega^\alpha\cdot(n-1)+1,\cdots\cdots,\omega^\alpha\cdot n\}$ト分割スレバ括弧内ノ各々ハ位相同形デアルカラ$\{1,\cdots\cdots,\omega^\alpha\}$即チ$K(\omega^\alpha)$ノ頂点ガ$\omega^\alpha$唯一ツデ次数ガ$\alpha$ナルコトヲ証明スレバ十分デアル。帰納法ニ依ル。$K(\omega^0)$ハ$1$ノミノ集合デアルカラ明ラカニ成立ツ。$\alpha$ガ孤立順序数ナラバ$K(\omega^\alpha)=K(\omega^{\alpha-1}\cdot\omega)$ナル故$K(\omega^\alpha)^{(\alpha-1)}=\{\omega^{\alpha-1},\omega^{\alpha-1}\cdot 2,\cdots\cdots,\omega^{\alpha-1}\cdot m,\cdots\cdots,\omega^{\alpha-1}\cdot\omega\}$。従ッテ$K(\omega^\alpha)^{(\alpha)}=\omega^\alpha$。$\alpha$ガ極限順序数ナラバ

$$K(\omega^\alpha)^{(\alpha)}=\prod_{\beta<\alpha}K(\omega^\alpha)^{(\beta)}=\prod_{\beta<\alpha}K(\omega^\beta\cdot\omega^{\alpha-\beta})^{(\beta)}=\prod_{\beta<\alpha}\{\omega^\beta,\omega^\beta\cdot 2,\cdots\cdots,\omega^\beta\cdot\omega^{\alpha-\beta}\}=\lim_{\beta\to\alpha}\{\omega^\beta,\omega^\beta\cdot 2,\cdots\cdots,\omega^\alpha\}=\omega^\alpha。$$

—— 以上 ——・

定理2. *Abzählbarer Kompaktum* Aノ頂点ノ次数ヲα，個数ヲnトスレバAハ$K(\omega^\alpha\cdot n)$ト位相同

形デアル：（A ハ位相的変形ニ依リ整列集合ニ直セル）。

証明。 定理1ト補助定理2ノ直接ノ歸結デアル。

（附言）(i) 本節ノ所論ハ大塚數學5巻1号ノ拙文ト重複シテ居リマス。アテラデ証明ヲ略シマシタノデコチラヘ書キマシタ。

(ii) *perfekt* ナ *nulldimensionaler Kompaktum* ガ悉ク *homöomorph* ナコトハ明ラカデアリマスガ *perfekt* デモナク *abzählbar* デモナイ *nulldimensionaler Kompaktum* ノ *Homöomorphiesatz* ハ條件ガ複雑数シマシテ面白クアリマセン。

II. *Fixpunktsatz*

定理 I（不動点定理）. *Nulldimensionaler Kompaktum* $\mathfrak{F}$ ヲ自ラ全体ヘ寫スー意連続寫像ガ少クトモ一ツノ不動点ヲ有スルタメニ必要十分ナル條件ハ $\mathfrak{F}$ ガ頂点只一ツナル *abzählbarer Kompaktum* ナルコトデアル。

証明. (I) 必要ナルコト。

(i) $\mathfrak{F}$ ガ *Kern* ヲ有スルナラバ

ソノ *Kern* ヲ K トシ $\frac{1}{2}\delta(K)=\varepsilon$ トシ *Nerv* ノ次元ガ 0 ナル如キ $\mathfrak{F}$ ノ ε-*Überdekung* ノ *Element* ノ

中 K ト nicht fremd ナ任意ノ一ツヲ $\mathfrak{F}_1$ トシ $\mathfrak{F}-\mathfrak{F}_1=\mathfrak{F}_2$ トスル。シカラバ $\mathfrak{F}_1$ モ $\mathfrak{F}_2$ モ共ニ Kern ヲ有スル nulldimensionaler Kompaktum デ $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_1+\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F}_1\cdot\mathfrak{F}_2=0$。準同形定理ニ依リ $\mathfrak{F}_1$ ハ $\mathfrak{F}_2$ 全体ヘ，$\mathfrak{F}_2$ ハ $\mathfrak{F}_1$ 全体ヘ写レル。之レハ $\mathfrak{F}$ ヲ自ラ全体ヘ寫ス一意連続寫像デシカモ不動点ガナイ。

(ii) $\mathfrak{F}$ ガ $n(\geqq 2)$ 個ノ頂点ヲ有スル abzählbarer Kompaktum ナラバ

ソノ頂点ヲ $x_1,\cdots\cdots,x_n$ トシ $\frac{1}{2}\underset{i\neq j}{\mathrm{M}}in\,\rho(x_i,x_j)=\varepsilon$ トシ $\mathfrak{F}$ ニ関スル x_i ノ ε-ausgezeichnete Umgebung ヲ $\mathfrak{F}_i(x_i)$ トシ，$(i=1,\cdots\cdots,n-1)$，残リヲ $\mathfrak{F}_n(x_n)$ トスル。シカラバ $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_1(x_1)+\mathfrak{F}_2(x_2)+\cdots\cdots+\mathfrak{F}_n(x_n)$ ト分割デキル。準同形定理ニヨリ $\mathfrak{F}_1(x_1)$ ハ $\mathfrak{F}_2(x_2)$ 全体ヘ，$\mathfrak{F}_2(x_2)$ ハ $\mathfrak{F}_3(x_3)$ 全体ヘ，$\cdots\cdots$，$\mathfrak{F}_n(x_n)$ ハ $\mathfrak{F}_1(x_1)$ 全体ヘ写レル。之ハ $\mathfrak{F}$ ヲ自ラ全体ヘ写ス一意連続写像デシカモ不動点ガナイ。

従ッテ $\mathfrak{F}$ ガ頂点唯一ツナル abzählbarer Kompaktum ナルコトガ必要デアル。以上。

(2) 十分ナルコト。

$\mathfrak{F}$ ノ頂点ヲ x トスレバ $\mathfrak{F}$ ヲ自ラ全体ヘ寫ス如何ナル一意連続寫像ニ関シテモ x ハ不動点デアル。何者，若シ $f(x)=y$, $x\neq y$ トスレバ $\frac{1}{2}\rho(x,y)=\varepsilon$ トシ y ノ ε-ausgezeichnete umgebung ヲ $U(y)$ トスル。寫像 f ノ連続性ヨリ x ノ十分小ナル ausgezeichnete umgebung $U(x)$ が存在シテ $f(U(x)) \subset U(y)$。従ッテ $\mathfrak{F}-U(y)$ ノ Urbild ハ $U(x)$ ヲ含マナイ。

従ッテ今 $\mathfrak{F}-U(y)=B$, $f^{-1}(\mathfrak{F}-U(y))=A$, x ノ次数ヲ α トスレバ $B^{(\alpha)}=x$, $A^{(\alpha)}=0$, 而モ $f(A)=B$。之レハ準同形定理ヨリ矛盾デアル。（証明終リ）

定理2. Abzählbarer Kompaktum $\mathfrak{F}$ ヲ自ラ全体ヘ寫ス topologische Abbildung ガ少クトモ一ツノ不動点ヲ有スルタメニ必要十分ナル條件ハ $\mathfrak{F}$ ノ頂点ガ只一ツナルコトデアル。

証明. $\mathfrak{F}$ ガ $n\ (\geqq 2)$ 個ノ頂点ヲ有スルナラバソノ頂点ヲ $x_1, \ldots\ldots, x_n$ トシ $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_1(x_1)+\ldots\ldots+\mathfrak{F}_n(x_n)$ ト分割シ $\mathfrak{F}_1(x_1) \longrightarrow \mathfrak{F}_2(x_2), \ldots\ldots, \mathfrak{F}_n(x_n) \longrightarrow \mathfrak{F}_1(x_1)$ ト topologisch ニ寫スナラバ之レハ $\mathfrak{F}$ ヲ自ラ全体ヘ寫ス topologisch Abbildung デシカモ不動点ガナイ。従ッテ $\mathfrak{F}$ ノ頂点ハ只一ツナルコトヲ要ス。逆ニ $\mathfrak{F}$ ノ頂点ガ只一ツナルトキハ $\mathfrak{F}$ ヲ $\mathfrak{F}$ 全体ヘ寫ス如何ナル topologische Abbildung ニ関シテモ頂点ノ Urbild ガ頂点デナケレバナラヌ。従ッテ頂点ガ不動点ニナル。以上。

定理3. 頂点唯一ツナル任意ノ abzählbarer Kompaktum $\mathfrak{F}$ ニ対シテ $\mathfrak{F}$ ヲ自ラ全体ヘ寫シシカモ不動点唯一ツナル如キ topologische Abbildung（従ッテ勿論 eindeutig stetige Abbildung）ガ存在スル。

証明. $\mathfrak{F}$ ノ頂点ヲ x トシ 0 ニ収斂スル ε_ν ヲ考ヘル。$\mathfrak{F}$ ニ関スル x ノ ε_1- ausgezeichnete Umgebung ヲ U_1

トシ $\mathfrak{F}-U_1=\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_1$ ノ U_1 内ニ於ケル ausgezeichnetes Bild ヲ $\mathfrak{F}_1^*$, $U_1-\mathfrak{F}_1^*=A_1$ トスル。A_{m-1} ニ関スル x ノ ε_m-ausgezeichnete Umgebung ヲ U_m トシ $A_{m-1}-U_m=\mathfrak{F}_m$, $\mathfrak{F}_m$ ノ U_m 内ニ於ケル ausgezeichnetes Bild ヲ $\mathfrak{F}_m^*$, $U_m-\mathfrak{F}_m^*=A_m$ トスル。然ラバ $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_1+\mathfrak{F}_1^*+\mathfrak{F}_2+\mathfrak{F}_2^*+\cdots\cdots+x$ ト閉集合ノ直和ニ分解デキ同形定理ニヨリ $\mathfrak{F}_m$ ト $\mathfrak{F}_m^*$ ハ位相同形デアル。シカモ $\lim\limits_{\nu\to\infty}\mathfrak{F}_\nu=\lim\limits_{\nu\to\infty}\mathfrak{F}_\nu^*=x$ ナル故、今 $\mathfrak{F}_m$ ト $\mathfrak{F}_m^*$ トヲ位相對應セシメ, $(m=1,2,\cdots)$, x ト x トヲ位相對應セシメルナラバ之ハ $\mathfrak{F}$ ト $\mathfrak{F}$ トノ位相對應デアリシカモソコニ x 以外ニ不動点ガナイ。以上。

（附言） perfekt デモナク abzählbar デモナイ nulldimensionaler Kompaktum ノ topologische Abbildung ニ関スル Fixpunktsatz ハ餘リ良イ結果ガ出ナイ様ニ思ヒマス。

（昭和十二年二月二十三日書終ル）