552. 線状函数方程式ニ就イテ(II)

北川　敏男（阪大）

4. Schürer ノ定理ノ一擴張、茲デハ，$f(x)$ ト Γ トニ適當ナ假定ヲ設ケルコトニ依リ、函数方程式

(1) $\Gamma f(x)=0$

ニツイテ、無限次微分方程式ニ於ケル Schürer ノ定理ノ Analogy ヲ求メマウ。其ノタメ次ノ規約等ガ必要デアル。

規約1. 函数集合 $(B^{(\infty)})$ トハ，凡テノ自然数 n ニツイテ常ニ $\mathcal{D}^n f(x)$ ガ存在シテ (A) ニ属スルヤウナ $f(x)\in(A)$ ノ全体ヲイフ。

規約2. $\mathfrak{Y}$ ヲ $\mathfrak{X}$ ノ任意ノ眞部分集合[(1)]トシ $f_{\mathfrak{Y}}(x)$ ヲ次

---

(1) 任意トイッテモ $\mathfrak{X}$ ノ或ルキマッタ subsets ノ system デアル。タトヘバ $\mathfrak{X}$ ヲ全直線ニスレバ $\mathfrak{X}$ ハ有界可測ナル集合ニトル。

ノ如ク定義スル。

$$(4.01)\quad \begin{aligned} f_Y(x) &= f(x), \quad for \quad x \in Y \\ &= 0 \qquad for \quad x \in X-Y \end{aligned}$$

然ルトキ各 $f(x) \in (A)$ ニ對シテ $f_Y(x) \in (A)$ デアッテ $\{f_Y(x)\}$ ハ normalised Banach space ヲツクルトスル。ソノ Norm ヲ $\| f_Y(x) \|_Y$ 又ハ單ニ $\| f(x) \|_Y$ デ表ハス。

規約3. $f(0)=0$ トナルヤウナ $f(x) \in (A)$ ノ全体ヲ以ッテ (B) トシ, 特ニ $\mathcal{D}f(x)$ モ存在シテ $\mathcal{D}f(x) \in (A)$ ナル如キ $f(x) \in (B)$ ノ全体ヲ (C) トスル。

規約4. 函数空間 (A) ノ完備性: $f_n(x) \in (A)$ $(n=1, 2, \text{-------})$ ガ任意ノ Y ニ於テ Norm $\| f_n(x) \|_Y$ ニ関シテ完備デアルトキニハ, $f(x) \in (A)$ ガ存在シテ任意ノ Y ニ於テ

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n(x) - f(x) \|_Y = 0$$

ヲ滿足スル。コレヲ $f_n(x)$ ハ $f(x)$ ニ converge スルトイフ。

例. 全直線デ定義セラレ任意ノ有限區間デ L^2 ニ屬スル樣ナ $f(x)$ ノ全体ヲ考ヘルト

$$\| f(x) \|_Y = \sqrt{\int_Y |f(x)|^2 dx}$$

トオクトキ規約 (2) ト (4) トヲ滿足スル。

規約5. $(B^{(\infty)})$ ニ屬シ且任意ノ眞部分集合 Y ニ関シ Y

ニ無関係ナ同ジ入デ

$$(4.02)\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\left\| \frac{\mathscr{D}^n f(x)}{\lambda^n} \right\|_{\mathrm{Y}} < 1$$

ヲ満足スル $f(x)$ ノ全体ヲ $(\mathrm{E}(\lambda))$ デ表ス。

規約6. $f_n(x)$ 及ビ $f(x)$ ハ $(\mathrm{B}^{(\infty)})$ ニ属スルトスル。入ヲ一定ノ複素数トスル。$\varepsilon>0$，真部分集合 Y ヲ如何ニ與ヘテモ $n(\varepsilon,\mathrm{Y})$ ガ定マリ $n>n(\varepsilon,\mathrm{Y})$ ナルトキニハ，スベテノ $p=0,1,2,\cdots\cdots$ ニ関シテ

$$(4.03)\quad \left\| \frac{\mathscr{D}^p(f_n(x)-f(x))}{\lambda^p} \right\|_{\mathrm{Y}} < \varepsilon$$

ナラシメウルトキ，$\{f_n(x)\}$ ハ $(\mathrm{E}(\lambda))$ ニ於テ $f(x)$ ニ收斂スルトイフ。

（注意） 定義カラ次ノコトガ明ラカデアル。$|\lambda_1|\geqq|\lambda|$ ナラバ 1°. $(\mathrm{E}(\lambda_1))\supseteqq(\mathrm{E}(\lambda))$ 2°. $(\mathrm{E}(\lambda))$ デ收斂ナラバ $(\mathrm{E}(\lambda_1))$ ニ於テモ亦然リ。 3°. $f(x)\in(\mathrm{E}(\lambda))$ ナラバ任意ノ自然数 p ニツイテ $\mathscr{D}^p f(x)\in(\mathrm{E}(\lambda))$.

定義1. $\{f_n(x)\}$ ガ $(\mathrm{E}(\lambda))$ ニ於テ $f(x)$ ニ收斂シ，$\Gamma f_n(x)$ ガ存在スルナラバ $\Gamma f(x)$ ハ存在シ且ツ常ニ $\Gamma f_n(x)$ ハ $\Gamma f(x)$ ニ收斂スルトスル。然ルトキ Γ ハ $(\mathrm{E}(\lambda))$ ニ於テ連続デアルトイフ。

以上ノ準備ノノチ、吾々ノ証明セントスル拡張サレタ Schürer ノ定理ハ次ノ如ク言ヒ表ハサレル：

定理5. $f(x)$ ヲ函数方程式 (1) ノ解トシ，$f(x)\in(\mathrm{E}(\lambda_0))$ トスル。Γ ガ $(\mathrm{E}(\lambda_0))$ ニ於テ連続ナリトスレバ

$$S_r(x,t;f) = S_r(x,0;f)$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathfrak{C}_r} \frac{j(\lambda x)}{G(\lambda)} \Gamma_0(\mathcal{L}_\lambda(f(x)))d\lambda$$

ニ於テ $|\lambda|>|\lambda_0|$ ナル如キ点ニ於ケル residues ハ悉ク零デアル。即チ $\mathfrak{C}_r$ ガ $\mathfrak{C}^{(\lambda_0)}$ 円 $|\lambda|\leqq|\lambda_0|$ ヲ内部ニ含ムカギリソレハ $\mathfrak{C}_r$ ニ無関係デ常ニ

$$S_r(x,t;f) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathfrak{C}^{(\lambda_0)}} \frac{j(\lambda x)}{G(\lambda)} \Gamma_0(\mathcal{L}_\lambda(f(x)))d\lambda$$

デアル。

証明. 今、差ニ $g_n(x)$ ヲ次ノ如ク定義スル。

$$(4.04)\qquad g_n(x) = -\sum_{\nu=0}^{n} \frac{\mathcal{D}^\nu f(x)}{\lambda^{\nu+1}}$$

然ルトキ明カニ $g_n(x)\in(E(\lambda_0))$ デアル。而シテ

$$(4.05)\qquad \left\| \frac{\mathcal{D}^p(g_m(x)-g_n(x))}{\lambda_0^p} \right\|_Y = \left\| \frac{1}{\lambda_0^p} \sum_{s=n+1}^{m} \frac{\mathcal{D}^{p+s}f(x)}{\lambda^{s+1}} \right\|_Y$$
$$\leqq \frac{1}{|\lambda|} \sum_{s=n+1}^{m} \left| \frac{\lambda_0(1-\varepsilon)}{\lambda} \right|^s$$

依ツテ特ニ $p=0$ トオイテ上式ヲミレバ，(A) ノ完備性カラ任意ノ眞部分集合Yニツイテ

$$\lim_{n\to\infty} \| g_n(x) - g(x) \|_Y = 0$$

ヲミタス $g(x)\in(A)$ ガアル。ヨッテ

$$(4.06)\qquad g(x) = -\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mathcal{D}^\nu f(x)}{\lambda^{\nu+1}}$$

然ルトキ $\mathscr{D}^{(p)}g_n(x)$ ハ $\mathscr{D}^{(p)}g(x)$ （ソノ存在モワカル）ニ收斂シ

$$\mathscr{D}^{(p)}g(x)=-\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\mathscr{D}^{p+\nu}f(x)}{\lambda^{\nu+1}}$$

デ與ヘラレル。茲ニ明カニ

$$\mathscr{D}g(x)=\lambda g(x)+f(x)$$

ナル關係ガアル。

$\mathscr{D}g(x)\in(\mathrm{A})$ デアルケレドモ未ダ $g(x)\in(\mathrm{C})$ ハイヘナイ。

ソノタメニハ

$$g_1(x)=g(x)-g(0)j(\lambda x)^{(1)}$$

ヲ考ヘレバ $g_1(x)\in(\mathrm{C})$ トナル。ヨッテ

$$\text{(4.07)}\qquad \mathscr{L}_\lambda(f(x))=g(x)-g(0)j(\lambda x)$$

トナル。$\{g_n(x)\}$ ハ $\mathrm{E}(\lambda_0)$ ニ於イテ $g(x)$ ニ收斂スルノデアルカラ，$\mathrm{E}(\lambda_0)$ ニ於ケル Γ ノ連續性ニヨッテ

$$\lim_{n\to\infty}\Gamma(g_n(x))=\Gamma\left(\lim_{n\to\infty}g_n(x)\right)$$

デアリ、他方 Γ ト $\mathscr{D}$ トノ交換可能カラ

$$\Gamma(g_n(x))=\Gamma\left(-\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\mathscr{D}^{\nu}f(x)}{\lambda^{\nu+1}}\right)=-\sum_{\nu=0}^{n}\frac{\mathscr{D}^{\nu}\Gamma f(x)}{\lambda^{\nu+1}}$$

$$=0$$

依ッテ

$$\Gamma(g(x))=0,\ \Gamma(\mathscr{L}_\lambda(f(x)))=-g(0)G(\lambda)$$

---

(1) $j(0)=1$ ト假定スル。

故ニ $\mathbb{C}_\lambda$ ヲ λ ヲ中心トスル充分小サナ円トスルトキ

$$S_{\mathbb{C}_\lambda}(x,t;\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathbb{C}_\lambda}\frac{j(\lambda x)}{G(\lambda)}G(\lambda)\,d\lambda=0.$$

コレカラ直チニ吾々ノ証明スベキ定理ガ得ラレル。