550. 完閉群ニ於ケル線狀移動可能微分演算子

吉田 耕作 (阪大)

境界值問題

$$\frac{dy}{dx}=\lambda y,\quad y(0)=y(1)$$

ト Fourier 級數論トノ密接ナ關係ニ對シテ次ノ如キ群論的解釋ガ許サレル。

1. $\mathfrak{G}$ ヲ r-parameter ノ compact, connected ナ Lie 群ノ一ツノ parameter 群トスル。$\mathfrak{G}$ ノ無限小微分演算子全体ハ所謂 $\mathfrak{G}$ ノ Lie 環 $\mathfrak{T}$ ヲ作ル。$\mathfrak{T}$ ノ base ヲ $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_r$ トスル。$\mathfrak{G}$ ノ各要素 x ニ對シテ X ト共ニ xXx^{-1} モ $\mathfrak{T}$ ニ屬スル。X カラ xXx^{-1} ニ移ルニハ $\mathfrak{G}$ ノ adjoint group ニヨッテ induce サレタ linear transformation in $\mathfrak{T}$ ヲ施シテ移レ講デアル。

今 $\mathfrak{G}$ ノ連続ナ行列表現 $\mathfrak{D}: M(x)=\|m_{ij}(x)\|$ ヲ考ヘル。準同型寫像 $\mathfrak{G}\to\mathfrak{D}$ ニヨッテ Lie 群 $\mathfrak{G}$ 及ビ Lie 群 $\mathfrak{D}$ ノ Lie 環 $\mathfrak{T}, \mathfrak{T}_{\mathfrak{D}}$ ノ間ニ線狀準同型寫像 $\mathfrak{T}\to\mathfrak{T}_{\mathfrak{D}}$ ガ induzieren サレル。コノトキ $X_i\to M_i$ トスレバ

$$X_i M(x)=M_i M(x)$$

ガ成立スル。

コヽニ

$$X_i M(x) = \lim_{t\to 0} \frac{M(e^{tX_i}x)-M(x)}{t}$$

ニシテ且ツ $M_i M(x)$ ハ infinitesimal matrix M_i ト行列 $M(x)$ ト行列積ヲ意味スル。operator X_i, M_i ノ linearity カラ逐次ニ

$X_i X_j M(x) = M_i M_j M(x)$, $X_i X_j X_k M(x) = M_i M_j M_k M(x)$

等ヲ得ル。

ヨツテ任意ノ Polynominal P ニ對シテ

(1) $P(X_1, X_2, \cdots\cdots, X_r) M(x) = P(M_1, M_2, \cdots\cdots, M_r) M(x)$

ヲ得ル。

備テ $\mathfrak{G}$ ハ完閉ダカラ，locally ニハ abelian ナ Lie 群 $\mathfrak{G}_1$ ト準單純ナ Lie 群 $\mathfrak{G}_2$ トノ直積トナル。$\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ ノ Lie 環ノ base ヲ夫々 $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_s$, 及ビ $X_{s+1}, X_{s+2}, \cdots\cdots, X_r$ トスル，若シモ $s>0$ ナラバ（即チ $\mathfrak{G}$ ノ核心ガ discrete デナイナラバ）

$$D = P(X_1, X_2, \cdots\cdots, X_s)$$

ノ形ノ微分演算子 D ハ明カニ移動可能（translatable）デアル：

(2) $Dy = yD, \qquad y \in \mathfrak{G}$

故ニ $D_{\mathfrak{D}} = P(M_1, M_2, \cdots\cdots, M_s)$ ナル行列ハ $\mathfrak{D}$ ノ全テノ行列ト可換デアリ且ツ (1) ニヨリ

$$DM(x) = D_{\mathfrak{D}} M(x)$$

ガ成立スル。

仍ツテ若シモ表現 $\mathfrak{D}$ ガ既約ナラバ上ノ可換性ニヨリ

$$D_{\mathfrak{g}} = \lambda E \text{(E単位行列)} \text{—Schur's lemma.}$$

トナラナケレバナラナイ。コノトキニハ $M(x)$ ノ成分 $m_{ij}(x)$ ガ全テ微分演算子 D ノ，固有値 λ ニ属スル固有函数トナル訳デアル。

今モシ逆ニ $f(x)$ ヲ D ノ固有函数トスレバ

$$Df(x) = \lambda f(x)$$

従ツテ (2) ニヨリ，任意ノ $y \in \mathfrak{G}$ ニ対シ

$$\begin{aligned} Df(yx) = Dyf(x) = yDf(x) = y\{\lambda f(x)\} \\ = \lambda f(yx) \end{aligned}$$

ガ成立スル。即チ $f(x)$ ト共ニ $f_y(x) = f(yx)$ モ亦固有値 λ ニ属スル D ノ固有函数デアル。コノコトカラ，若シモ <u>D ノ固有値 λ ノ multiplicity ガ有限ナラバ</u>，良ク知ラレタ Peter-Weyl ノ論法ニヨリ $f(x)$ ガ $\mathfrak{G}$ ノ或連続表現 $\mathfrak{D}'$ ノ行列成分ナルコトガワカル。

備ヘ Peter-Weyl ノ論法ニヨレバ，完閉群 $\mathfrak{G}$ ノ連続表現ハ unitary 表現ト同値デアリ（従ツテ完全可約）且ツ $\mathfrak{G}$ ノ互ニ同値デナイ既約 unitary 表現全体ヲトルト其ノ行列成分ハ $\mathfrak{G}$ ノ上ノ unitary orthogonal ナ完全函数系ヲ作ル。故ニ

定理. $s > 0$ 且ツ D ノ point spectre ノ固有値ノ multiplicity all finitl ナラバ

i) D ノ固有函数ハ $\mathfrak{G}$ ノ既約 unitary ナ連続表現ノ行列成分然シテ斯ルモノノミヨリ成リ

ii) 之等ノ固有函数ハ $\mathfrak{G}$ ノ上ノ unitary orthogonal

ナ完全函数系ヲ作ル。

冒頭ニ述ベタ Fourier type ノ operator $\frac{d}{dx}$ ハ1ヲ法トスル実数ノ加法群 $\mathfrak{g}$ ニ関聯シテ考ヘテミレバヨイ。Laplace operator モ同ジヤウニ考ヘルコトガ出来ル。

2. $s=0$ 即チ $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_2$ ガ準単純ナトキニハ上ノ如キ operator D ハ存在シナイ。然シ H. Casimir (Ams. Proc. 1931, p. 844) ニヨレバコノトキハ

$$G=\sum_{\lambda,\mu=1}^{r} g^{\lambda\mu} D_\lambda D_\mu$$

ナル operator ハ translatable デアリ且ツ上定理ノ D ノ代リニ之ノ G ヲ使フコトガ出来ル。コヽニ $g^{\lambda\mu}$ ハ Cartan ノ non-singular quadratic form $\sum_{\lambda,\mu=1}^{r} g_{\lambda\mu} e_\lambda e_\mu$ ノ係数 $g_{\lambda\mu}$ ノ contragredient Tensor デアル。$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_2$ ノ structure constant ヲ使ヘバ

$$g_{\lambda\mu}=\sum_{\rho,\sigma=1}^{r} c_{\lambda\rho\sigma}\, c_{\mu\sigma\rho}.$$

斯クテ一般ニ D type ノ operator ト Casimir-operator G トノ Polynomial ヲ考ヘレバ, $\mathfrak{g}$ ノ表現ニ attach シタ無限ニ多クノ線状移動可能微分演算子ガ得ラレルノデアル。Casimir operator G ハ巧妙ナ有用ナモノデハアルガ, $s>0$ ノトキニハ D type ノ operatorノ方ガズット簡單ナコトヲ注意セラレタイ。

上ノ考ヘヲ $\mathfrak{G}$ ニヨツテ transitive ニ動カサレル homogeneous compact space ノ上ノ函數系ノ議論ニ押進メテ，種々ノ classical ナ境界値問題ノ群論的解釋モナサレ得ルデアリマセウ。