548. Nulldimensionaler Kompaktum ノ Abbildungstheorie (其ノ二)

中澤 武雄 (東京大理大)

前回ノ続キデアリマス。

Kompaktum ヲ Kompaktum (ノ中, 或ハ全体) ヘ移ス一意連続寫像ノ集合ヘ Metrik ヲ入レテ[1] Abbildungsraum ト呼ブ。Abbildungsraum ガ beschränkt デ separabel デ vollständig ナコトハ既ニ分ッテヰル[2]。

コノ Abbildungsraum ノ次元, 寫像類ノ個数, 及ビ kompakt ナタメノ條件等ヲ考ヘルコトハ Kompaktum ノ Topologie ニ於テカナリ面白イ問題ダト思ハレル。然シ之等ノ諸問題モ nulldimensional ノトキハ簡單ニ

---

(1) 大塚数學, 5巻1号, 22頁

(2) 同上 拙文 23頁定理廿, 及ビ

K. Borsuk, "Sur les rétractes". Fund. Math. 17, 1931, (164—167)

解ケテシマフ。

I. Abbildungsraum ノ次元

定理 1. (Nulldimensionaler) Kompaktum ヲ nulldimensionaler Kompaktum (ノ中, 或ハ全体) ヘ移ス Abbildungsraum ハ nulldimensional デアル。

証明. Abbildungsraum ハ一般ニハ kompakt デナイカラ、茲ニ証明セントスル次元モ Menger 流ノ次元[(3)] デアル。

即チ任意ノ Abbildung f_0 ノ任意ノ ε-Umgebung $\varepsilon(f_0)$ ニ對シテ f_0 ヲ含ム適當ナ offene Menge $O(f_0)$ ガ存在シテ $\varepsilon(f_0) \supset O(f_0)$, $O(f_0) = \overline{O(f_0)}$ ナルコトガ言ヘレバヨイ。

今寫シコマレル nulldimensionaler Kompaktum ヲ $\mathfrak{F}$ トシ $\mathfrak{F}$ ノ Nerv ノ次元ガ 0 ナル如キ ε-Überdeckung ノ Element ヲ $\mathfrak{F}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{F}_s$ トスル。$\mathfrak{F}$ ノ点 x ノ f_0 ニ関スル Urbild ノ集合ヲ $f_0^{-1}(x)$ トカクコトニシテ $\mathfrak{F}$ ノ総テノ点 x ニ関シテ x ト $f(f_0^{-1}(x))$ トガ同ジ $\mathfrak{F}_i$ ニ含マレル如キ Abbildung f ノ総テノ集合ヲ $O(f_0)$ トスル。然ラバ明ラカニ $O(f_0)$ ヲ f_0, 又 $\rho(f, f_0) < \delta(\mathfrak{F}_i) < \varepsilon$

---

(3) K. Menger, "Über die Dimensionalität von Punktmengen", Wien. Monatsch. 33 (1923), (148–160).

ナル故 $\varepsilon(f_0) \supset O(f_0)$。

次ニ $O(f_0)$ ガ offen ニシテ同時ニ abgeschlossen ナルコトヲ證明スル。

$\mathfrak{F}_1, \text{------}, \mathfrak{F}_s$ ハ互ニ共通根ヲ有セザル開集合デアルカラ $\underset{i \neq j}{Min}\, \rho(\mathfrak{F}_i, \mathfrak{F}_j) = \delta$ ハ 0 ナラザル正數デアル。一方 Abbildungsraum ニ於ケル $O(f_0)$ ノ Komplementärmenge ヲ $C(f_0)$ トシ $C(f_0) \ni g$ ナル任意ノ g ヲ考ヘルト $O(f_0)$ ノ定義ヨリ明ラカニ $\mathfrak{F}$ ノ少クトモ一点 x ニ對シテ x ト $g(f_0^{-1}(x))$ トハ異ナル $\mathfrak{F}_i$ ニ含マレル。

シカルニ $O(f_0) \ni f$ ナル任意ノ f ニ関シテハ x ト $f(f_0^{-1}(x))$ トハ同ジ $\mathfrak{F}_i$ ニ含マレル故 $\rho(f(f_0^{-1}(x)), g(f_0^{-1}(x))) \geqq \delta$。故ニ $\rho(f, g) \geqq \delta$,

$$故ニ \quad \rho(O(f_0), C(f_0)) = \underset{\substack{f \in O \\ g \in C}}{Min}\ \rho(f, g) \geqq \delta。$$

故ニ $O(f_0)$ ハ offen ニシテ同時ニ abgeschlossen デアル。

故ニ Abbildungsraum ハ Menger ノ意味デ nulldimensional デアル。 ——證明終—

系. (Nulldimensionaler) Kompaktum ヲ nulldimensionaler Kompaktum (ノ中, 或ハ全体) ヘ移ス Abbildungsraum ハ vollständig zusammenhanglos (4) デアル。

(4) K. Menger, "Dimensionstheorie," Leipzig, Teubner, 1928.

証明. 定理1=依リ Abbildungsraum ハ nulldimensional デアリ nulldimensionale Menge ハ vollständig zusammenhanglos デアル。[4]

以上

従ッテ Kettenhomotopie =ヨルモ Kurvenhomotopie =ヨルモ Abbildungsklasse ノ個数ヲ考ヘルコトハ写像ノ個数ヲ考ヘル問題=帰着スル。

II. Abbildung ノ個数

定理1. Kompaktum ヲ Kompaktum (ノ中, 或ハ全体) ヘ写ス写像ノ個数ハ高々$\mathfrak{c}$個デアル。

証明. Abbildungsraum ガ separabel ナコトヨリ明ラカ。以上

定義1. 集合 $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\cdots, \frac{1}{n}, \cdots\cdots, 0\right\}$ ノコトヲ便宜上 P ト呼ブコトニシテオク。

補助定理1. 有限ナラザル (nulldimensionaler) Kompaktum ハ P ト homöomorph ナル部分集合ヲ含ム。(trivial!)。

補助定理2. 有限ナラザル nulldimensionaler Kompaktum ハ P 全体ヘ eindeutig stetig =措写可能デアル。

証明. $\mathfrak{F}$ 内=少クトモ一ツ存在スル Häufungspunkt x ト 0 =収斂スル ε_ν ヲトル。$\mathfrak{F} = U_0(x)$, x ノ ε_ν-ausgezeichenete Umgebung ヲ $U_\nu(x)$ トシ $\{U_\nu(x) - U_{\nu+1}(x)\}$

ノ中，空ナラザルモノノ Folge ヲ $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots\ldots, \mathfrak{F}_n, \ldots\ldots$ トシ $f(\mathfrak{F}_n)=\frac{1}{n}$, $f(x)=0$ トスレバ f ハ $\mathfrak{F}$ ヲ P全体ヘ寫ス一意連続寫像デアル。　以上

補助定理3. P ヲ P全体ヘ (homöomorph ニ) 寫ス寫像ノ個数ハ $\aleph$ 個デアル。

証明.　$f(\frac{1}{n})=\frac{1}{n_\nu}$, $f(0)=0$ トスレバ f ニ對應シテ正数列 $\{n_\nu\}$ ガ決ル。逆ニ増加正整数列 $\{n_\nu\}$ ヲトレバ之ニ對應スル寫像 f ガ存在スル。今斯ル数列ノ中 $\{n_\nu\}$，($n_{2m-1}=2m-1$, $n_{2m}=2m$ ナルカ或ハ $n_{2m-1}=2m$, $n_{2m}=2m-1$) ナルモノノミヲ考ヘテモソノ個数ハ $2^{\aleph_0}$ 即チ $\aleph$ 個存在スル。シカモ之レニ對應スル寫像ハ P ヲ P全体ヘ (homöomorph ニ) 移ス。従ッテ寫像ノ個数ハ少クトモ $\aleph$ 個。之ト定理1カラ丁度 $\aleph$ 個ニナル。以上

補助定理4. (Nulldimensionaler) Kompaktum ヲ有限個ノ互ニ unzusammenhängend ナ部分集合ノ集合ニ zerlegen スル仕方ハ高々可附番個デアル。

証明.　$\mathfrak{F}_1, \ldots\ldots, \mathfrak{F}_s$ ガ $\mathfrak{F}$ ノ unzusammenhängend ナ分割トハ $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_1+\cdots\cdots+\mathfrak{F}_s$, $i\neq j$ ナラバ $\mathfrak{F}_i\cdot\mathfrak{F}_j=0$, $\overline{\mathfrak{F}_i}=\mathfrak{F}_i$, $(i,j=1,\ldots\ldots,s)$ ナルコトデアル。

従ッテ $\underset{i\neq j}{Min}\,\rho(\mathfrak{F}_i,\mathfrak{F}_j)=d$ ハ 0 デナイ。コノ d ノコトヲ分割 $\mathfrak{F}_1,\ldots\ldots,\mathfrak{F}_s$ ノ距離ト云フ。扨 $\mathfrak{F}$ ノ距離ガ ε_ν ヨリ大ナル分割ノ仕方ハ高々有限個シカアリ得ナイ。何者、

假ニ可附番個アツタトセヨ。ソノ分割ヲ $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots\cdots, \mathfrak{P}_m, \cdots\cdots$ トスル。$\mathfrak{F}$ ノ二点 x, y ガ如何ナル $\mathfrak{P}_m$ ニ依ツテモ separate サレナイトキ x, y ヲ同類トスルナラバ、之レデ $\mathfrak{F}$ ノ点ヲ分類デキル。

類ノ個数ハ可附番個！ 各々カラ代表ニ一点ヲ取出シテ $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_\nu \cdots\cdots$ トスル。総テノ $\mathfrak{P}_m$ ノ距離ハ ε_ν ヨリ大デアルカラ相異ナル p, q ニ對シテ $\rho(x_p, x_q) > \varepsilon_\nu$。之レハ Kompaktheit ト矛盾スル！ソコデ ε_ν ヨリ大ナル距離ノ分割ノ仕方ハ高々有限個デアル。$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots\cdots, \varepsilon_\nu \cdots\cdots \to 0$ トスルト高々可附番個ノ分割ガ数ヘラレテ任意ノ分割ハソノ中ニ数ヘラレテヰル。以上。(5)

定理 2. Nulldimensionaler Kompaktum $\mathfrak{F}_1$ ヲ nulldimensionaler Kompaktum $\mathfrak{F}_2$ ノ<u>中ヘ</u>移ス Abbildung ノ個数ガ高々可附番ナルタメニ必要十分ナル條件ハ $\mathfrak{F}_2$ ガ abzählbarer Kompaktum ニシテ且ツ $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ ノ何レカ少ナクトモ一方ガ有限集合ナルコトデアル。

証明. (i) 必要ナルコト。

若シ $\mathfrak{F}_2$ ガ巾集合ナラバ $\mathfrak{F}_1$ 全体ヲ $\mathfrak{F}_2$ 内ノ任意ノ一点ニ寫ス如キ寫像ダケ数ヘテモ巾個ニナル。之レハ不合理。

次ニ $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ 共ニ無限集合ナリトスレバ補助定理 2 ニヨリ

---

(5) 此ノ証明ハ大塚数學 5 巻 1 号 27 頁補助定理 2 ノ証明ト重複シテヰルガ、定理ハ一般ノ Kompaktum ニ近言ヘル定理デアル。

$\mathfrak{F}_1$ ハ P 全体ヘ写レ, 補助定理 1 ニ依リ $\mathfrak{F}_2$ ハ P ト同形ナル部分集合 P^* ヲ有ス。補助定理 3 ニヨリ P ヲ P^* ヘ移ス寫像ハ少クトモ $\aleph$ 個アル, 之レモ不合理。

従ッテ $\mathfrak{F}_2$ ハ高々可附番集合デ $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ 何レカ一方ハ有限集合デナケレバナラヌ。

(ii) 十分ナルコト。

$\mathfrak{F}_1$ ガ有限集合ナルトキハ ソノ個数ヲ n トスルト $\mathfrak{F}_2$ ハ高々可附番集合ナル故 Abbildung ノ個数ハ高々 $\aleph_0^n$ 即チ可附番個デアル。次ニ $\mathfrak{F}_2$ ガ有限集合ナラバ $\mathfrak{F}_2$ ノ任意ノ点 x ノ Urbild $f^{-1}(x)$ ハ $\mathfrak{F}_1$ ノ中ノ offen ノ閉集合デアル。従ッテ f ニ對シテ只一ツノ $\mathfrak{F}_1$ ノ互ニ unzusammenhängend ナ有限個ノ部分集合ノ集合ヘノ分割ガ對應スル。

然ルニ斯ル分割ノ個数ハ補助定理 4 ニ依ッテ高々可附番個シカナイ。従ッテ Abbildung ノ個数モ高々可附番個デアル。以上。

系. Nulldimensionaler Kompaktum $\mathfrak{F}_1$ ヲ nulldimensionaler Kompaktum $\mathfrak{F}_2$ ノ<u>中ヘ</u>移ス Abbildung ノ個数ガ高々有限個ナルタメニ必要十分ナル條件ハ $\mathfrak{F}_2$ ガ只一点ヨリナル集合ナルカ $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ 共ニ有限集合ナルカデアル。

証明. 必要ナルコト。

若シ $\mathfrak{F}_2$ ガ無限集合ナラバ $\mathfrak{F}_1$ 全体ヲ $\mathfrak{F}_2$ 内ノ任意ノ一点ニ寫ス如キ寫像ダケ数ヘテモ無限個ニナッテ不都合。次ニ

$\mathfrak{F}_1$ ガ無限集合，$\mathfrak{F}_2$ ガ少クトモ二点ヲ有スル集合ナリトスレバ補助定理2ニヨリ $\mathfrak{F}_1$ ハPヲ全体ヘ写シ $\mathfrak{F}_2$ ハ例ヘバ二点 x, y ヲ含ム。Pヲ $\{x, y\}$ ニ写ス写像 f_s ヲ次ノ様ニ決メル。

$$f_s\left(\frac{1}{n}\right)=x,\ (1\leqq n\leqq s),\ f_s\left(\frac{1}{n}\right)=y,\ (s<n),\ f(0)=y$$

斯ル f_s ダケ数ヘテモ可附番個ニナッテ不都合。即チ $\mathfrak{F}_2$ ガ少クトモ二点ヲ保有スルトキハ $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ 共ニ有限集合デナケレバナラヌ。

十分ナルコトハ明ラカデアル。以上。

補助定理5. Cantor-集合ヲ自ラ全体ヘ写シ、シカモ不動点ノナイ topologische Abbildung ガ $\aleph$ 個存在スル。

証明. Cantor-集合内ノ点ノ間ニ次ノ如キ加法ヲ定義シテ加群ニスル:

3進法ニ依ル任意二点 x, y ノ表示ヲ夫々 $0.\xi_1\xi_2\cdots\xi_n\cdots$, $0.\eta_1\eta_2\cdots\eta_n\cdots$ トスルトキ

$$x+y=0.(\xi_1+\eta_1\ (mod\ 4))(\xi_2+\eta_2\ (mod\ 4))\cdots(\xi_n+\eta_n\ (mod\ 4))$$

$\cdots$, （但シ $\xi_n+\eta_n\ (mod\ 4)$ トハ4ニナルト0ニスル意味ナリ）ト定義スル。然ラバ明ラカニ Cantor-集合ノ Metrik ヲ加群ノ Metrik ト考ヘテモ位相的ニハ差支ヘナイ。

今 $C\ni t$ ナル t ニ関聯スル Abbildung f_t トハ次ノ如キモノヲ指ス: $C\ni x$ ナル x ニ対シテ $f_t(x)=x+t$。

然ラバ明ラカニ f_t ハCヲC全体へ寫ス topologische Abbildung デ $t \neq 0.0000\cdots$ ナラバ f_t ハ不動点ヲ有シナイ。

又 $t \neq s$ ナラバ $f_t \neq f_s$。故ニ斯カル f_t ハ全体デ $\aleph$ 個アル。コノ事ト定理1カラ本誌ハ終結スル。(餘談ナガラ斯カル f_t ノ全体ハソノ加群ト位相同形ニシテ且ツ同型ナル加群ヲナス)。

系1. Cantor-集合ヲ自ラ全体へ寫シシカモ任意ニ與ヘラレタ点ヲ他ノ任意ニ與ヘラレタ点へ寫ス topologische Abbildung ガ少クトモ一ツ存在スル。

系2. Perfekt ナ nulldimensionaler Kompaktum ヲ自ラ全体へ寫シシカモ不動点ノナイ topologische Abbildung ガ $\aleph$ 個存在スル。[6]

系3. Perfekt ナ nulldimensionaler Kompaktum ヲ自ラ全体へ寫シ、シカモ任意ニ與ヘラレタ点ヲ他ノ任意ニ與ヘラレタ点へ寫ス topologische Abbildung ガ少クトモ一ツ存在スル。

定義2. 上述ノ加群ヲ Cantor-加群ト呼ビ, f_t ヲソノ Parametertranslation ト呼ブ。

補助定理6. Cantor-集合ヲ任意ノ Kern ヲ有スル nulldimensionaler Kompaktum 全体へ寫ス一意連続寫像ノ個数ハ $\aleph$ 個デアル。

---

(6) 此ノ定理ハ Math. Ann. 98 (1928), 103頁ニアリマス。但シ証明ハヤヽ違フ。

証明. 前回ニ述ベタヤウニ任意ノ $\mathfrak{F}$ ハ C ノ中ノ適當ナ部分集合 $\mathfrak{F}^*$ ヘ homöomorph ニ移セル。C ハ $\mathfrak{F}^*$ 全体ヘ $\mathfrak{F}^*$ 内ノ点ハ動カサズニ eindeutig stetig ニ移セル。ソノ寫像ヲ g トスル。$\mathfrak{F}^*$ 内ニ特定ノ一点 x_0 ヲトリ別ニ任意ノ一点 x ヲトリ Cantor-加群ノ Parametertranslation f_{x-x_0} ヲ作ル。

然ラバ $\mathfrak{F}^*$ ヲ x ナル任意ノ x ニ対シテ gf_{x-x_0} ハ C ヲ $\mathfrak{F}^*$ 全体ヘ写ス Abbildung デアリ，$gf_{x-x_0}(x_0)=x$ ナル故 $x \neq y$ ナラバ $gf_{x-x_0} \neq gf_{y-x_0}$。故ニ $\mathfrak{F}^*$ ノ濃度ト Abbildung gf_{x-x_0} ノ個数トハ相等シイ。然ルニ $\mathfrak{F}$ ハ Kern ヲ有スル故 $\mathfrak{F}^*$ ハ $\aleph$ 集合デアル。

從ツテ C ヲ $\mathfrak{F}^*$ 全体ヘ移ス Abbildung ノ個数ハ少クトモ $\aleph$ 個デアル。$\mathfrak{F}$ ト $\mathfrak{F}^*$ ト homöomorph デアルカラ C ヲ $\mathfrak{F}$ 全体ヘ移ス Abbildung ノ個数モ少クトモ $\aleph$ 個デアル。之ノ事ト定理1カラ証明ハ終結スル。以上。

定理 3. Nulldimensionaler Kompaktum $\mathfrak{F}_1$ ヲ $\mathfrak{F}_1$ ニ準同形ナル nulldimensionaler Kompaktum $\mathfrak{F}_2$ 全体ヘ移ス Abbildung ノ個数ガ高々可附番ナルタメノ必要十分條件ハ $\mathfrak{F}_2$ ガ有限集合ナルコトデアル。

証明. 十分ナルコトハ定理2ノ十分証明ト同ジク補助定理4ヨリ明ラカデアルカラ必要ノ方ダケ証明スル。對偶ヲ証明スル。假ニ $\mathfrak{F}_2$ ガ無限集合ナリトセヨ。

(i) $\mathfrak{F}_2$ ガ Kern ヲ有スル場合。

然ラバ假定ヨリ必然 $\mathfrak{F}_1$ モ Kern ヲ有スル。Kern ヲ有ス

ル $\mathfrak{F}_1$ ハ Cantor－集合全体ヘ eindeutig stetig ニ移レル。Cantor－集合ヲ Kern ヲ有スル $\mathfrak{F}_2$ 全体ヘ写ス一意連続写像ハ補助定理6ニヨリ少クトモ $\aleph$ 個存在スル。之ハ不合理！

(ii) $\mathfrak{F}_2$ ガ Kern ヲ有セザル場合。

$\mathfrak{F}_2$ ノ第1次ノ導来集合 $\mathfrak{F}_2^{(1)}$ 内ニ少クトモ一ツ存在スル $\mathfrak{F}_2^{(1)}$ ノ孤立点 x ヲトリ x ノ十分小サイ ausgezeichnete Umgebung B ヲ作リ $B\cdot(\mathfrak{F}_2^{(1)}-x)=0$ ナラシメルコトガ出來ル。明ラカニ B ハ P ト位相同形。$\mathfrak{F}_2$ ハ $\mathfrak{F}_1$ ニ準同形ナル故少クトモ一ツノ写像 f ガ存在シテ $f(\mathfrak{F}_1)=\mathfrak{F}_2$。B ノ f ニ関スル Urbild ヲ A トスレバ A ハ $\mathfrak{F}_1$ ノ中デ孤立（＝ offen & abgeschlossen）シテキルカラ写像 f ヲ外デハソノマユデ A → B ニ於イテダケ変ヘテモ構ハナイ。A ハ無限集合ナル故、補助定理2ニヨツテ P 全体ヘ eindeutig stetig ニ移ス。P ヲ B 全体ヘ移ス仕方ハ補助定理3ニヨツテ $\aleph$ 個存在スル。從ツテ不合理！

証明終。

系. Nulldimensionaler Kompakteum $\mathfrak{F}_1$ ヲ $\mathfrak{F}_1$ ニ準同形ナル nulldimensionaler Kompaktum $\mathfrak{F}_2$ 全体ヘ移ス Abbildung ノ個数ガ高々有限個ナルタメノ必要十分條件ハ $\mathfrak{F}_2$ ガ只一点ヨリナル集合ナルカ $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ 共ニ有限集合ナルカデアル。

証明. 十分ナルコトハ明ラカダカラ必要ノ方ダケ。本定理ヨリ先ヅ $\mathfrak{F}_2$ ハ有限集合デナケレバナラヌ。

次ニ、假リニ $\mathfrak{F}_2$ が少クトモ二点ヲ有シ $\mathfrak{F}_1$ が無限集合ナリトスル。

假定カラ $\mathfrak{F}_1$ ヲ $\mathfrak{F}_2$ 全体ヘ寫ス寫像が少クトモ一ツ存在スル。ソレヲ f トスル。$\mathfrak{F}_2$ ハ有限集合ナル故 $\mathfrak{F}_2$ ノ少クトモ一点 x ニハ f ニ依ツテ $\mathfrak{F}_1$ ノ無限ノ点が對應スル。ソノ x ノ Urbild ヲ A トスル。A ハ $\mathfrak{F}_1$ ノ中デ孤立シテヰルカラ寫像 f ヲ外デハソノマヽデ A ニ於テダケ變ヘテモ差支ヘナイ。$\mathfrak{F}_2$ 内ニ x ノ外ニ一点 y ヲトル。A ハ無限集合ダカラ P 全体ヘ移セル。P ヲ集合 $\{x, y\}$ ニ寫ス寫像 f_s ヲ次ノ様ニ決メル。

$$f_s\left(\frac{1}{n}\right)=x,\ (1\leqq n\leqq s),\ f_s\left(\frac{1}{n}\right)=y,\ (s<n),\ f(0)=y$$

A 以外ノ f ト A 内ノ f_s トヲ併セナ g_s トスレバ g_s ハ $\mathfrak{F}_1$ ヲ $\mathfrak{F}_2$ 全体ヘ移ス寫像デ $g_s, (s=1, 2, \text{-------})$ ハオ互ニ異ナル寫像デアル。之レハ不都合。

従ツテ $\mathfrak{F}_2$ が只一点ヨリナル集合ナルカ $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ 共ニ有限集合ナルカデナケレバナラヌ。以上。

III. Abbildungsraum ノ Kompaktheit

Nulldimensionaler Kompaktum $\mathfrak{F}$ ノ中ノ孤立点ノミカラナル Fundamentalfolge ヲ考ヘル。

玆ニ云フ Fundamentalfolge トハ集合 $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \text{------}, \frac{1}{n}, \text{------}\}$ ト位相同形ナルモノノ意味デアル。$\mathfrak{F}$ ノ中ニ孤立点が無限個アルトキハソノ中カラ適當ニ可附番個選

ンデ Fundamentalfolge ガ作レル。逆ニ $\mathfrak{F}$ ノ中カラ孤立点ノミカラナル Fundamentalfolge ガアルトキハ明ラカニ $\mathfrak{F}$ ノ中ニ孤立点ガ無限個存在スル。

次ニ $\mathfrak{F}$ ノ中ノ孤立点ガ高々有限個ノ場合ハソノ孤立点ノ総テヲ取除クト空集合ニナルカ或ハ Kern ガ残ル。逆ニ $\mathfrak{F}$—K ガ高々有限集合ナラバ $\mathfrak{F}$ ノ中ノ孤立点ハ明ラカニ高々有限個デアル。

補助定理1. 有限ナラザル $\mathfrak{F}$ ハ孤立点ノミカラナル Fundamentalfolge ヲ有スルカ $\mathfrak{F}$—K ガ高々有限集合ナルカデアル。

補助定理2. Fundamentalfolge ヲ Fundamentalfolge 全体ヘ寫ス Abbildungsraum ハ kompakt デナイ。

証明. Fundamentalfolge ト位相同形ナル集合 $\{1, \frac{1}{2}, \cdots\cdots, \frac{1}{n}, \cdots\cdots\}$ ヲ自ラ全体ヘ寫ス Abbildungsraum ガ kompakt デナイコトヲ証明スレバ十分デアル。寫像 f_s ヲ次ノ様ニ決メル。

$$f_s\left(\frac{1}{n}\right)=1,\ (1 \leqq n \leqq s),\ f_s\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n-s+1},\ (s<n)$$

然ラバ f_s, $(s=1, 2, \cdots\cdots)$ ハ集合 $\{P-0\}$ ヲ自ラ全体ヘ寫ス寫像デアッテシカモ相異ナル任意ノ p, q ニ対シテ

$$\rho(f_p, f_q) \geqq \frac{1}{2}$$

従ッテソノ Abbildungsraum ハ kompakt デナイ。以上。

補助定理3. Kern (= perfekter nulldimensionaler Kompaktum) ヲ Kern 全体ヘ寫ス Abbildungsraum ハ kompakt デナイ。

証明. Kern ト位相同形ナル Cantor-集合ヲ自ラ全体ヘ寫ス Abbildungsraum ガ kompakt デナイコトヲ証明スレバ十分デアル。寫像 f_S ヲ次ノ様ニ決メル:

$$f_S(0.\xi_1\xi_2\text{------}\xi_S\xi_{S+1}\text{------}) = 0.\xi_{S+1}\text{------}$$

然ラバ f_S ($S=1, 2, \text{------}$) ハ Cantor-集合ヲ自ラ全体ヘ寫ス寫像デアッテシカモ相異ナル任意ノ p, q ニ對シテ $\rho(f_p, f_q) \geqq \frac{2}{3}$

従ッテソノ Abbildungsraum ハ kompakt デナイ。以上。

定理1. Nulldimensionaler Kompaktum $\mathfrak{F}_1$ ヲ nulldimensionaler Kompaktum $\mathfrak{F}_2$ ノ<u>中ヘ</u>寫ス Abbildungsraum ガ kompakt ナルタメノ必要十分ナル條件ハ $\mathfrak{F}_1$ ガ有限集合ナルカ或ハ $\mathfrak{F}_2$ ガ只一点ヨリナル集合ナルカデアル。

定理2. Nulldimensionaler Kompaktum $\mathfrak{F}_1$ ヲ $\mathfrak{F}_1$ ニ準同形ナル nulldimensionaler Kompaktum $\mathfrak{F}_2$ <u>全体ヘ</u>寫ス Abbildungsraum ガ kompakt ナルタメノ必要十分ナル條件ハ $\mathfrak{F}_1$ ガ有限集合ナルカ或ハ $\mathfrak{F}_2$ ガ只一点ヨリナル集合ナルカデアル。

証明. 両者ノ証明ヲ一緒ニヤル。

(1) 定理1ニ於ケル必要性ノ証明.

對偶ヲ云フ。假リニ $\mathfrak{F}_1$ ガ無限集合，$\mathfrak{F}_2$ ガ少クトモ二点ヲ有スルトスル。前節補助定理2ニヨリ $\mathfrak{F}_1$ ハP全体ヘ写レ $\mathfrak{F}_2$ ハ例ヘバ二点 x, y ヲ含ム。Pヲ集合 $\{x, y\}$ ニ寫ス寫像 f_s ヲ次ノ様ニ決メル。

$$f_s\left(\frac{1}{n}\right)=x, \ (1 \leqq n \leqq s), \ f_s\left(\frac{1}{n}\right)=y, \ (s<n), \ f_s(0)=y$$

然ラバ f_s，$(s=1, 2, \text{-------})$ ハ $\mathfrak{F}_1$ ヲ $\mathfrak{F}_2$ ノ中ヘ寫ス寫像デアッテ相異ナル任意ノ p, q ニ對シテ

$$\rho(f_p, f_q)=\rho(x, y) \neq 0$$

従ッテ $\mathfrak{Folge}$ $\{f_s\}$ ハ集積点ヲ有シナイ。之レハ不合理！ 以上。

(2) 定理 2 ニ於ケル必要性ノ証明

對偶ヲ云フ。假リニ $\mathfrak{F}_1$ ガ無限集合，$\mathfrak{F}_2$ ガ少クトモ二点ヲ有スルトスル。

(i) $\mathfrak{F}_2$ ガ有限集合ナル場合

假定カラ $\mathfrak{F}_1$ ヲ $\mathfrak{F}_2$ 全体ヘ寫ス寫像 f ガ少クトモ一ツ存在スル。$\mathfrak{F}_1$ ハ無限集合ナル故 $\mathfrak{F}_2$ ノ少クトモ一点 x ニハ f ニヨッテ $\mathfrak{F}_1$ ノ無限ノ点ガ對應スル。x ノ Urbild ヲAトスレバAハ $\mathfrak{F}_1$ ノ中デ孤立シテヰルカラ寫像 f ヲ外デハソノマヽデAニ於テダケ變ヘテモ差支ヘナイ。$\mathfrak{F}_2$ 内ニ x ノ外ニ一点 y ヲトル。Aハ無限集合ダカラP全体ヘ移セル。Pヲ集合 $\{x, y\}$ ニ写ス寫像 f_s ヲ次ノ様ニ決メル。

$$f_s\left(\frac{1}{n}\right)=x, \ (1 \leqq n \leqq s), \ f_s\left(\frac{1}{n}\right)=y, \ (s<n), \ f(0)=y$$

A以外ノ f トA内ノ f_s トヲ併セテ g_s トスレバ g_s, $(s=1, 2, \cdots\cdots)$ ハ $\mathfrak{F}_1$ ヲ $\mathfrak{F}_2$ 全体ヘ移ス寫像デアッテ相異ナル任意ノ p, q ニ對シテ

$$\rho(g_p, g_q) \geqq \rho(x, y) > 0$$

從ッテ Folge $\{g_s\}$ ハ集積点ヲ有シナイ。之レハ不合理！ 以上。

(ii) $\mathfrak{F}_2$ が孤立点ノミカラナル Fundamentalfolge ヲ有スル場合。

ソノ Fundamentalfolge ヲ $B=\{x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, \cdots\cdots\}$, BノUrbild ヲ夫々 $A=\{A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n, \cdots\cdots\}$ トスル。$A_n, (n=1, 2, \cdots\cdots)$ ハ $\mathfrak{F}_1$ ノ中デ孤立シテヰルカラ寫像 f ヲ A ノ外デハソノマヽデ A ヲ B 全体ヘ寫ス所ニ於テダケ $\lim\limits_{n\to\infty} f(A_n) = \lim\limits_{m\to\infty} x_m$ ナル如ク変ヘテモ差支ヘナイ。Aヲ Fundamentalfolge $\{y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n, \cdots\cdots\}$ 全体ヘ移ス。

然ルニ Fundamentalfolge $\{y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n, \cdots\cdots\}$ ヲ Fundamentalfolge $\{x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n, \cdots\cdots\}$ 全体ヘ寫ス Abbildungsraum ハ補助定理2ニ依ッテ kompakt デナイ。之ハ不合理！ 以上。

(iii) $\mathfrak{F}_2 - K_2$ が高々有限集合ナル場合（K_2 ハ $\mathfrak{F}_2$ ノ Kern）

K_2 ノ f ニ關スル Urbild ヲ A トスレバ A ハ $\mathfrak{F}_1$ ノ中デ孤立シテヰルカラ寫像 f ヲ A ノ外デハソノマヽデ A ヲ K_2 全体ヘ寫ス所ニ於テダケ変ヘテモ差支ヘナイ。A ハ $\aleph$ 集合デ

アルカラ Kern ヲ有スル nulldimensionaler Kompaktum デアル。従ッテ A ハソノ Kern K_1 全体ヘ移セル。

然ルニ Kern K_1 ヲ Kern K_2 全体ヘ寫ス Abbildungsraum ハ補充定理3ニ仍ッテ kompakt デナイ。之ハ不合理！ 以上。

(3) 定理1ニ於ケル十分性ノ証明。

$\mathfrak{F}_2$ ガ只一点ノ集合ナラ Abbildungsraum モ亦只一点ノ空間デ kompakt ナコトハ言フモ愚カ。

次ニ $\mathfrak{F}_1$ ガ有限集合ナルトキ。$\mathfrak{F}_1$ ノ点ヲ $x_1, \cdots\cdots, x_k$ トシ $f_m(x_i) = y_i^m$, $(i=1, \cdots\cdots, k)$ トスル。

$y_1^1, y_1^2, \cdots\cdots\cdots, y_1^m, \cdots\cdots$ ハ少クトモ一ツノ集積点 y_1 ヲ有ス。y_1 ニ收斂スルソノ部分列ヲ ${}'y_1^1, {}'y_1^2, \cdots\cdots\cdots, {}'y_1^m, \cdots\cdots$ トスル。${}'y_2^1, {}'y_2^2, \cdots\cdots\cdots, {}'y_2^m, \cdots\cdots$ ハ少クトモ一ツノ集積点 y_2 ヲ有ス。y_2 ニ收斂スルソノ部分列ヲ ${}^2y_2^1, {}^2y_2^2, \cdots\cdots\cdots, {}^2y_2^m, \cdots\cdots$ トスル。${}^{k-1}y_k^1, {}^{k-1}y_k^2, \cdots\cdots {}^{k-1}y_k^m, \cdots\cdots$ ハ少クトモ一ツノ集積点ヲ有ス。ソノ点ヲ y_k トスル。y_k ニ收斂スルソノ部分列ヲ ${}^ky_k^1, {}^ky_k^2, \cdots\cdots\cdots, {}^ky_k^m, \cdots\cdots$ トスル。

然ラバ ${}^kf^1(x_i), {}^kf^2(x_i), \cdots\cdots, {}^kf^m(x_i), \cdots\cdots$ ハ y_i ニ收斂スル，$(i=1, \cdots\cdots, k)$。今 $f(x_i) = y_i$，$(i=1, \cdots\cdots, k)$ トスレバ其故 $\lim\limits_{m\to\infty} {}^kf^m = f$。従ッテ Abbildungsraum ハ kompakt デアル。以上。

(4) 定理2ニ於ケル十分性ノ証明.

$\mathfrak{F}_2$ ガ只一点ノ集合ナラ Abbildungsraum モ亦只一点ノ空間デアル。$\mathfrak{F}_1$ ガ有限集合ナラソレニ準同形ナル $\mathfrak{F}_2$ モ亦有限集合ナル故 Abbildungsraum モ従ッテ又有限集合トナル。何レノ場合モ kompakt ナコトハ自明。

証明終

（附言）　前回及ビ今回ニ述ベタ殆ンド総テノ Abbildung ニ関スル定理ハ寧ロ nulldimensionaler Kompaktum $\mathfrak{F}_1$ ノ方ヲ一般ノ Kompaktum ニマデ（結果ハ其ノ儘デ）擴張シテ言ヘルノデアリマスガ煩雑ニナリマスノデ一般ノ場合ハ後デ一括シテ此ノ次辺リニ書ク積リデアリマス。

（昭和十二年二月十一日書終ル）