547. Algebra ノ Idealtheorie ニ就イテノ一注意

小川潤次郎（東大数學科後期）

次ノコトハ私ガ末綱先生ノゼミナールデ Max. Deuring ノ Algebren ヲ読ンデヰマスノデ其ノ時先生ノ御注意ニヨリ考ヘタコトデアリマス。

同書第六章第二節 Die normalen Ideale 74頁ニ於テ Satz 6 ニ於テ $\mathfrak{O}_i$ ガ Maximalordnung ナルトキ ganze Ideal $\mathfrak{a}_{ii}$ ガ $\mathfrak{O}_i$ ト異ルナラ $\mathfrak{a}_{ii}^{-1}$ ガ nicht-ganz ニナルコトヲ証明シ Satz 7 デコレヲ用ヒテ $\mathfrak{O}_i$ ガ maximal ノトキ $\mathfrak{a}_{ik}\mathfrak{a}_{ik}^{-1}=\mathfrak{O}_i$ ナルコトヲ証明シ、次ニ Satz 9 デ一ツノ Maximalordnung ノ gleichseitig ナ Ideal 全体ガ abel 群ヲナスコトヲ云ヒ、コレヲ用ヒテ Satz 11 ヲ証明シ、次ニ Satz 11 ヲ用ヒテ Satz 6 ノ拡張ナル Satz 10 ヲ証明シテヰマス。ツマリ Satz 10 ヲ証明スルノニ Satz 6 ヲ使ッテ居リマス。此処ニハ Satz 10 ヲ Satz 6 ヲ含メテ証明シテミマス。即チ同書ニ於テコノ方法ヲ用フレバ Satz 10 ヲ Satz 6 ニナホシ、Satz 6. ハ全然不用トナルワケデアリマス。Satz 11 ハ Def. 6 ノ次アタリニオクコトニナリマス。

若シ私ノ証明ニ誤リガアリマシタラ御叱正下サレバ幸ト存ジマス。

記号及ビ仮定ハスベテ Deuring ノマヽトスル。

Satz 10. Ist $\mathfrak{O}_i$ maximal, $\mathfrak{a}_{ik}$ ein ganzes Ideal mit der Linksordnung $\mathfrak{O}_i$, das von $\mathfrak{O}_i$ selbst verschieden ist, so ist $\mathfrak{a}_{ik}^{-1}$ nicht ganz. (M. Deuring. Algebren. S. 74)

Beweis: $\mathfrak{a}_{ik}^{-1}$ ガ ganz ナラ $\mathfrak{a}_{ik}=\mathfrak{O}_i$ ヲ証明ス ル。

$\mathfrak{a}_{ik}^{-1}$ ノ Def. $\mathfrak{a}_{ik}\mathfrak{a}_{ik}^{-1}\mathfrak{a}_{ik}=\mathfrak{a}_{ik}$ ヨリ $\mathfrak{a}_{ik}^{-1}$ ガ ganz ナラ $\mathfrak{a}_{ik}^{2}=\mathfrak{a}_{ik}$ 即チ $\mathfrak{O}_i$ Linksideal $\mathfrak{a}_{ik}$ ガ idempotent ト云フコトニナル。

I° 先ヅ最初 $\mathfrak{A}$ ヲ halbeinfach トスレバ，ソレハアル多元体 D ノ Matrizesring デ

$$\mathfrak{A}=\sum_{\nu,\mu=1}^{n} D c_{\nu\mu}$$

デ Hasse ノ Satz ニヨリ $\mathfrak{A}$ ノ Maximalordnung $\mathfrak{O}_i$ ト D ノ Maximalordnung $\mathfrak{O}_i^*$ トハ一對一ニ對應シテ

$$\mathfrak{O}_i=\sum_{\nu,\mu=1}^{n}\mathfrak{O}_i^{*} c_{\nu\mu}$$

又 $\mathfrak{A}$ ノ $\mathfrak{O}_i$ Linksideal $\mathfrak{a}_{ik}$ ト D ノ $\mathfrak{O}_i^*$ Linksideal $\mathfrak{a}_{ik}^*$ モ一對一ニ對應シテ

$$\mathfrak{a}_{ik}=\sum_{\nu,\mu=1}^{n}\mathfrak{a}_{ik}^{*} c_{\nu\mu}$$

トナリ、$\mathfrak{a}_{ik}$ ガ idempotent ナルコトヨリ $\mathfrak{a}_{ik}^*$ ガ Idempotent ニナリ

$$\mathfrak{a}_{ik}^{*2} = \mathfrak{a}_{ik}^{*}$$

仍テ $\mathfrak{a}_{ik}^{*}$ ハ E. Artin. Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen (Hamb. Abh. 5. 1927) Satz 6 ヨリ少クトモ一ツノ Idempotent e ($e^2 = e$) ヲ有ス。

D ノ Peircesche Zerlegung ヲ考ヘテ $d \in D$ トスレバ

$$d = de + (d - de)$$

$$d = ed + (d - ed)$$

トナルガ D ハ Nullteilerfrei デアルカラ、スベテノ D ノ元 d ニ對シテ

$$de = ed = d$$

$$\therefore \quad e = 1$$

即チ $\quad \mathfrak{a}_{ik}^{*} = \mathfrak{o}_i^{*}$

從ツテ $\quad \mathfrak{a}_{ik} = \mathfrak{o}_i$

II° $\mathfrak{a}$ ガ halbeinfach ノトキハ einfache Bestandteile ノ直和ニ分ツテ

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + \cdots\cdots + \mathfrak{a}_s$$

トスレバ、ソレニ對應シテ $\mathfrak{a}$ ノ Maximalordnung $\mathfrak{o}_i$ 及 Ideal $\mathfrak{a}_{ik}$ ガ

$$\mathfrak{o}_i = \mathfrak{o}_i^{(1)} + \cdots\cdots + \mathfrak{o}_i^{(s)}$$

$$\mathfrak{a}_{ik} = \mathfrak{a}_{ik}^{(1)} + \cdots\cdots + \mathfrak{a}_{ik}^{(s)}$$

トナリ、$\mathfrak{o}_i^{(e)}$ ハ $\mathfrak{a}_e$ ノ Maximalordnung デ $\mathfrak{a}_{ik}^{(e)}$ ハ $\mathfrak{o}_i^{(e)}$ ノ Linksideal トナルカラ $\mathfrak{a}_{ik}^{(e)}$ ニ I° ヲ適用シテ

$a_{ik}^{(e)} = o_i^{(e)}$ 故ニ $a_{ik} = o_i$ ヲ結論出来ル。

（証明終了） 1937, 2. 12.