544. Nulldimensionaler Kompaktum ノ Abbildungstheorie (其ノ一)

中澤武雄 (東京文理大)

Nulldimensionaler Kompaktum ノ Abbildungstheorie ニ就イテ少シバカリヤツテ見タコトヲ述ベサセテ頂キタク思ヒマス。之ハ大塚數学會誌第五巻第一号ノ拙文 Projektionsspektrum ト Kompaktum ノ第五章 Abzählbarer Kompaktum ノ続キデアリマスガコレダケデモ完全ナ文章ニナツテ居リマス。

I. Vorbereitung

1. Nulldimensionaler Kompaktum

in sich kompakt デ Metrik ヲモツテル位相集合ヲ Kompaktum ト云ヒソレガ nulldimensional ノトキ nulldimensiorialer Kompaktum トイフ。コヽニ云フ次元ハ Alexandroff 流ノ次元デアル。

2. 導来集合

$\mathfrak{F}$ ヲ nulldimensionaler Kompaktum トスル。$\mathfrak{F}=\mathfrak{F}^{(0)}$ トスル。$\mathfrak{F}^{(0)}$ カラ孤立点ヲ除キ去ルト閉集合ガ残ル。之レヲ $\mathfrak{F}^{(1)}$ トスル。順序數 α ニ對シテ $\alpha>\beta$ ナル總テノ β ニ對シテ $\mathfrak{F}^{(\beta)}$ ガ定義サレテヰルトキ (i) α ガ孤立順序數ナラバ $\mathfrak{F}^{(\alpha-1)}$ カラソノ孤立点ヲ除去シタ集合ヲ $\mathfrak{F}^{(\alpha)}$ トシ (ii) α ガ極限順序數ナラバ $\prod_{\beta<\alpha}\mathfrak{F}^{(\beta)}=\mathfrak{F}^{(\alpha)}$ トスル。然ラバ空ナラザル $\mathfrak{F}^{(\alpha)}$ ハ又 nulldimensionaler Kompaktum デ $\alpha<\beta$ ナル α,β ニ対シテハ $\mathfrak{F}^{(\alpha)}\supset\mathfrak{F}^{(\beta)}$

デアル。$\mathfrak{F}^{(\alpha)}$ ノコトヲ $\mathfrak{F}$ ノ α 次ノ導來集合ト呼ブ。

3. ε-ausgezeichnete Umgebung

M ヲ $\mathfrak{F}$ ニ於ケル開部分集合トスル。與ヘラレタ任意ノ ε ニ對シテ Nerv ノ次元ガ 0 ナル如キ $\mathfrak{F}$ ノ ε-Überdeckung ガ存在スル。ソノ System ヲ $\mathfrak{F}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{F}_i, \cdots\cdots, \mathfrak{F}_s$ トスルトキ M ト nicht fremd ナ $\mathfrak{F}_i$ ノ和ヲ $U(M)$ トスルト、$U(M)$ ト $\mathfrak{F}-U(M)$ ハ互ニ相離レタ開集合ニナル。シカモ $U(M) \subset S(M, \varepsilon)$。コノ $U(M)$ ノコトヲ $\mathfrak{F}$ ニ關スル M ノ ε-ausgezeichnete Umgebung ト呼ブ。

4. Kern

$\mathfrak{F}$ ノ in sich dicht ナ部分集合ヲ D トスルト $\overline{D}$ モ亦 in sich dicht デアル。從ツテ $\mathfrak{F}$ ノ總テノ in sich dicht ナ部分集合ノ和ヲ K トスレバ K ハ $\mathfrak{F}$ ニ於ケル最大ノ perfekt ナ部分集合ニナル。コノ K ヲ $\mathfrak{F}$ ノ Kern 核ト呼ブ。$\mathfrak{F}$ ハ核ヲ有スルコトモアリ有シナイコトモアル。少クトモ一ツ $\neq 0$ ナル D ヲ有スレバ必ズ K ヲ有ス。

5. Vertex

Kern ヲ有セザル $\mathfrak{F}$ ノ ω_1 次ノ導來集合 $\mathfrak{F}^{(\omega_1)}$ ハ空集合デアル。

證明. 若シ $\mathfrak{F}^{(\omega_1)} \neq 0$ トスレバ $\mathfrak{F}^{(\omega_1)}$ 內ニ少クトモ一ツ存在スル $\mathfrak{F}^{(\omega_1)}$ ノ孤立点 x ヲトリ十分小サイ ε ニ關スル x ノ ε-ausgezeichnete Umgebung $U(x)$ ヲ作リ $U(x) \cdot \{\mathfrak{F}^{(\omega_1)} - x\} = 0$ トデキル。從ツテ $U(x)$ ハ nulldimensionaler Kompaktum デ $U(x)^{(\omega_1)} = x$。

今 O ニ收斂スル $\mathcal{E}_\nu$ ヲ考ヘ $U(x)$ ニ關スル x ノ $\mathcal{E}_\nu$-ausgezeichnete Umgebung ヲ $U_\nu(x)$, $U(x)-U_\nu(x) = \mathfrak{F}_\nu$ トスレバ $\lim U_\nu(x)\to x$, 且ツ $\mathfrak{F}_\nu^{(\omega_1)}=0$。從ツテ $\mathfrak{F}_\nu^{(\alpha)}\neq 0$, $\mathfrak{F}_\nu^{(\alpha+1)}=0$ ナル如キ可附番順序数 α が $\mathfrak{F}_\nu$ ニ對シテ決マル，（かんとるノ共通部分定理）。（$\mathfrak{F}_\nu$ 自体が空ナルトキハ $\alpha=-1$ ト考ヘル）。$\mathfrak{F}_\nu$ ノ斯ル α ヲ α_ν トスル。ν ニ關スル α_ν ノ上限ヲ α トスレバ α ハ可附番順序数デアル。

然ルニ $\lim\{U(x)-\mathfrak{F}_\nu\}\to x$ ナル故 $U(x)^{(\alpha+1)}=$ 高々 x。從ツテ $U(x)^{(\omega_1)}=0$。コレハ不合理デアル。

——（証明終）——

從ツテ $\mathfrak{F}^{(\alpha)}=0$ ナル如キ最初ノ α ハ孤立可附番順序数デアル，（かんとるノ共通部分定理）。從ツテ $\mathfrak{F}^{(\alpha-1)}$ ハ空ナラザル有限集合デアル。斯カル $\mathfrak{F}^{(\alpha-1)}$ ノ各点ヲ $\mathfrak{F}$ ノ Vertex 頂点ト呼ビ $\alpha-1$ ヲソノ頂点ノ Ordnung 次数ト呼ブ。

定理1. 核ヲ有セザル $\mathfrak{F}$ ニ於テハソノ逐次導來集合ヲ作ツテ行クトキ可附番順序数ニ於イテ頂点が現ハレル。

6. Kern ノ次數

定理2. 核ヲ有スル $\mathfrak{F}$ ニ於イテハソノ逐次導來集合ヲ作ツテ行クトキ可附番順序数ニ於イテ核が現ハレル。コノ可附番順序数ヲソノ Kern ノ Ordnung 次数ト呼ブ。

証明. $\mathfrak{F}$ ノ Kern ヲKトシ O ニ收斂スル $\mathcal{E}_\nu$ ヲ考

ヘル。$\mathfrak{F}$ ニ関スル K ノ ε_ν-ausgezeichnete Umgebung ヲ $U_\nu(K)$, $\mathfrak{F}-U_\nu(K)=\mathfrak{F}_\nu$ トスル。シカラバ $\mathfrak{F}_\nu$ ハ核ヲ有セザルガ故ニソノ頂点ノ次数ハ可附番順序数デアル。之レヲ α_ν トスル。スルト $\mathfrak{F}^{(\alpha_\nu+1)}\subset U_\nu(K)$。従ッテ今 ν ニ関スル α_ν ノ上限ヲ α トスレバ $\mathfrak{F}^{(\alpha+1)}=K$。シカモ $\alpha+1$ ハ可附番順序数デアル。

——(証明終)——

7. Cantor-集合

$$x=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\xi_\nu}{3^\nu},\quad \xi_\nu=0 \text{ oder } 2$$ ナル如キ数 x ノ集合ヲ Cantorsche $\mathfrak{F}_\sigma$-Menge ト云フ。(1) ココニハ簡単ニ Cantor-集合ト呼ブ。例ノ線分ヲ三等分シテハ中ノ開部分ヲ除キ去ル操作ヲ繰返シテ得ラレル集合デアル。nulldimensionaler Kompaktum ノ著名ナ一種デアル。

定理3. 核（換言スレバ perfekt ナ nulldimensionaler Kompaktum）ハ Cantor-集合ト位相同形デアル。

証明ハ Annalen ノ 98 ノ 99頁—101頁ニ Alexandroff ト Urysohn ガヤッテアリマスカラ略シマス。

---

(1) Math. Ann. 98 (1928), 99頁, van Dantzig ノ topologische Algebra ノ中ニハ Cantorsche Menge トアル。

8. Abzählbarer Kompaktum

高々可附番集合ガ同時ニ Kompaktum デアルモノヲ云フ。明ラカニ nulldimensionaler Kompaktum ノ一種デアル。

補助定理 1. (Nulldimensionaler) Kompaktum 内ノ孤立点ノ個数ハ高々可附番個デアル。

証明. 任意ノ孤立点 x ニ對シテ $\frac{1}{2}\rho(x, \mathfrak{F}-x)=\delta_x$ トシ x ノ Umgebung $\delta_x(x)$ ヲ作ル。斯カル近傍 $\delta_x(x)$ ガ高々可附番個ナルコトヲ云ヘバヨイ。今 0 ニ收斂スル ε_ν ヲ考ヘル。$\mathfrak{F}$ ガ kompakt ナコトカラ ε_ν ヨリ大ナル δ_x ノ個数ハ高々有限個デアル, 例ヘバ n_ν 個。$\sum_{\nu=1}^{\infty} n_\nu$ ハ從ツテ高々可附番個。——以上——

定理 4. 核ヲ有セザル $\mathfrak{F}$ ハ abzählbarer Kompaktum デアル。

証明. $\mathfrak{F}^{(\beta)}$ ノ孤立点ノ個数ヲ n_β, $\mathfrak{F}$ ノ頂点ノ次数ヲ α トスレバ $\mathfrak{F}$ ノ濃度ハ $\sum_{\beta=0}^{\alpha} n_\beta$ デアル。シカルニ補助定理ニヨリ $n_\beta \leqq \aleph_0$, 又 $\alpha < \omega_1$ ナル故 $\mathfrak{F}$ ノ濃度ハ高々可附番デアル。

——以上——

定理 5. Abzählbarer Kompaktum ハ核ヲ有シナイ。

証明. Cantor-集合ガ濃度 $\aleph$ ナルコトヨリ明ラカデアル。

即チ核ヲ有セザルコトヽ abzählbar ナコトトハ

äquivalent デアル。

（附言） Wohlordnungssatz ヲ用ヒレバ或ル順序数ニ於イテ Kern 或ハ Vertex ガ表ハレ、以上ノ所論ハイクラカ簡約サレマスガ假定ヲ少クスルタメニ殊更ニソレヲ使フコトヲ避ケマシタ。

II. Homomorphiesatz

任意ノ nulldimensionaler Kompaktum ヲ任意ノ nulldimensionaler Kompaktum 全体ヘ恒ニ eindeutig stetig ニ描寫デキルトハ限ラナイ。例ヘバ有限集合ヲ無限集合全体ヘ寫スコトハデキナイ。コノ必要十分條件ヲ求メルノガ本節デアル。

定理 1. Nulldimensionaler Kompaktum ハ恒ニソノ閉部分集合全体ヘ eindeutig stetig ニ描寫デキル。

證明. $\mathfrak{F}$ ノ閉部分集合ヲ M トシ $\mathfrak{F}$ ガ M 全体ヘ寫レルコトヲ云フ。$\mathfrak{F}=U_0(M)$ トシ別ニ 0 ニ收斂スル ε_ν ヲ考ヘル。Nerv ノ次元ガ 0 ナル如キ $U_{\nu-1}(M)$ ノ ε_ν-Überdeckung ヲ作リ、ソノ Element ノ内 M ト nicht fremd ナモノヽ和ヲ $U_\nu(M)$ トシ殘リヲ $\mathfrak{F}_{\nu 1},\cdots\cdots,$ $\mathfrak{F}_{\nu i},\cdots\cdots,\ \mathfrak{F}_{\nu s(\nu)}$ トスル。M ノ点ニシテ $\mathfrak{F}_{\nu i}$ ニ最モ近イ点ヲ $y_{\nu i}$ トシ $f(\mathfrak{F}_{\nu i})=y_{\nu i}$ トスル。M 内ノ点 x ニ対シテハ $f(x)=x$ トスル。コノ寫像ハ $\mathfrak{F}$ ヲ M 全体ヘ寫ス一意寫像デアル。

以下コレが連続ナルコトノ証明。

從テノ *trivial* ナ場合ヲ省略スレバ $x_\nu \to x$, $x_\nu \in M$, $x \in M$ ナルトキ $f(x_\nu) \to x$ ナルコトヲ証スレバヨイ。

今 $x_\nu \in \mathfrak{F}_{\mu i}$ トスレバ $\mathfrak{F}_{\mu i} \subset U_{\mu-1}(M) \subset S(M, \varepsilon_{\mu-1})$。故ニ $\rho(\mathfrak{F}_{\mu i}, M) < \varepsilon_{\mu-1}$。故ニ $\rho(\mathfrak{F}_{\mu i}, f(x_\nu)) = \rho(\mathfrak{F}_{\mu i}, f(\mathfrak{F}_{\mu i})) < \varepsilon_{\mu-1}$。シカモ $\delta(\mathfrak{F}_{\mu i}) < \varepsilon_\mu$ ナル故 $\rho(x_\nu, f(x_\nu)) < \varepsilon_{\mu-1} + \varepsilon_\mu$。$x_\nu \to x$ ナルガ故ニ $\nu \to \infty$ ナラバ $\mu \to \infty$。

故ニ $\lim\limits_{\nu\to\infty} \rho(x_\nu, f(x_\nu)) = \lim\limits_{\mu\to\infty} (\varepsilon_{\mu-1} + \varepsilon_\mu) = 0$。從ツテ

$$\lim_{\nu\to\infty} \rho(x, f(x_\nu)) = \lim_{\nu\to\infty} \rho(x, x_\nu) + \lim_{\nu\to\infty} \rho(x_\nu, f(x_\nu)) = 0。$$

故ニ f ハ $\mathfrak{F}$ ヲ M全体ヘ寫ス一意連続寫像デアル。

(証明終)[2]

---

(2) 本定理ノ証明ヲミレバ次ノ様ニ言ッテモ差支ヘナイ。

(i) *Nulldimensionaler Kompaktum* $\mathfrak{F}$ ハソノ任意ノ閉部分集合Mニ對シテMノ点ヲ動カサナイ一意連続寫像が存在シテ $\mathfrak{F}$ ヲM全体ヘ寫スコトが出來ル。

然モコノ事実ハ *nulldimensional* ノ特性デアル。即チ

(ii) *Kompaktum* $\mathfrak{F}$ ノ任意ノ閉部分集合Mニ對シテMノ点ヲ動カサナイ一意連続寫像が恆ニ存在シテ $\mathfrak{F}$ ヲM全体ヘ寫スコトが出來ルトキハ $\mathfrak{F}$ ハ *nulldimensional* デアル。

証明。$\mathfrak{F}$ ノ任意ノ二点ヲ x, y トスル。$\mathfrak{F}$ ハ (x, y) ヘモ移セル筈デアル。x, y ノ *Urbild* ヲ夫々 $O(x), O(y)$ トスレバ $O(x), O(y)$ ハ共ニ *offen* デ $O(x) \ni x$, $O(y) \ni y$, $O(x) + O(y) = \mathfrak{F}$, $O(x) \cdot O(y) = 0$。

(次頁ヘ続ク)

定理2. 核ヲ有スル任意ノ nulldimensionaler Kompaktum ハ Cantor-集合全体ヘ eindeutig stetig ニ描寫可能デアル。

証明. $\mathfrak{F}$ノ Kern ヲ K トスル。定理1ニヨリ $\mathfrak{F}$ハ K 全体ヘ描寫デキル。然ルニ K ハ Cantor-集合ト位相同形デアル，(I, 定理3)。—以上—

定理3. 任意ノ nulldimensionaler Kompaktum ハ Cantor-集合ノ適當ナ部分集合ト homöomorph デアル。(3)

証明. nulldimensionaler Kompaktum ヲ $\mathfrak{F}$トシ 0 ニ収斂スル ε_ν ヲ考ヘル。$\mathfrak{F}$ノ ε_1-Überdeckung ノ Element ヲ $\mathfrak{F}_1, \cdots\cdots, \mathfrak{F}_{S_1}$ トスレバ $2^{k_1-1} < S_1 \leqq 2^{k_1}$ ナル如キ k_1 ガ存在スル。

次ニ 0 ト 2 ノミカラナル k_1 個ノ順列 $(\xi'_1 \cdots\cdots \xi'_{k_1})$ ヲ S_1 個作リ $\mathfrak{F}_i$ ヲ $\mathfrak{F}_{\xi'_1 \cdots\cdots \xi'_{k_1}}$ ト書キ改ム。

$\mathfrak{F}_{\xi'_1 \cdots\cdots \xi'_{k_1} \xi^2_1 \cdots\cdots \xi^2_{k_2} \cdots\cdots \xi^m_1 \cdots\cdots \xi^m_{k_m}}$ ノ ε_{m+1}-Überdeckung ノ

(前頁ヨリ続キ)

故ニ $\mathfrak{F}$ハ vollständig zusammenhanglos デアル。vollständig zusammenhanglos ナ Kompaktum ガ nulldimensional ナコトハ Menger ノ Dimensionstheorie ノ中ニアリマス。—以上—

(3) 此ノ定理ハ従来ヨリ分ッテ居ル筈ト思ヒマスガ Original ハ何処カゴ存ジノ方ハ教ヘテ下サイ。出所ガハッキリシマセンノデ証明ヲ書イテオキマス。

Element ヲ $\mathfrak{F}_1, \text{------}, \mathfrak{F}_{s_{m+1}}$ トシ $2^{k_{m+1}-1} < s_{m+1} \leqq 2^{k_{m+1}}$ ナル如キ k_{m+1} ヲトリ 0ト2ノミカラナル k_{m+1} 個ノ順列 $(\xi_1^{m+1} \text{------} \xi_{k_{m+1}}^{m+1})$ ヲ s_{m+1} 個作リ $\mathfrak{F}_i$ ヲ $\mathfrak{F}_{\xi_1^1 \text{---} \xi_{k_1}^1 \text{---} \xi_1^m \text{---} \xi_{k_m}^m \xi_1^{m+1} \text{---} \xi_{k_{m+1}}^{m+1}}$ ト書キ改ム。(k_{m+1} ハ $\xi_1^1 \text{----} \xi_{k_1}^1 \xi_1^2 \text{----} \xi_{k_2}^2 \text{----} \xi_1^m \text{----} \xi_{k_m}^m$ ニ関シテ定マル，mニ関シテ定マルノデハナイ)。

然ラバ m ニ関スル Folge $\{\mathfrak{F}_{\xi_1^1 \text{----} \xi_{k_1}^1 \text{----} \xi_1^m \text{----} \xi_{k_m}^m}\}$ ハ Durchschnitt トシテ $\mathfrak{F}$ ノ一点 x ヲ決定スル。逆ニ $\mathfrak{F}$ ノ点 y ニ対シテハ唯一通リノ Folge $\{\mathfrak{F}_{\eta_1^1 \text{----} \eta_{k_1}^1 \text{----} \eta_1^m \text{----} \eta_{k_m}^m}\}$ が存在シ Durchschnitt トシテ y ヲ保有スル。x, y ノ Metrik ノ大小ハ suffix ノ Folge $\{\xi_1^1 \text{----} \xi_{k_1}^1 \xi_1^2 \text{----} \xi_{k_2}^2 \text{----}\}$, $\{\eta_1^1 \text{----} \eta_{k_1}^1 \eta_1^2 \text{----} \eta_{k_2}^2 \text{----}\}$ ノ初メノ部分ノ類似度ノ多寡ト一致スル。今 $0.\xi_1^1 \text{----} \xi_{k_1}^1 \xi_1^2 \text{----} \xi_{k_2}^2 \text{----}$ ヲ3進法ノ小数ト考へ $f(x) = 0.\xi_1^1 \text{----} \xi_{k_1}^1 \xi_1^2 \text{----} \xi_{k_2}^2 = x^*$ トスレバ x^* ノ全体ハ Cantor－集合ノ部分集合Mヲ形成スル。Cantor－集合ノ Metrik ハ明ラカニ小数部分ノ初メノ部分ノ類似度ノ多寡ト一致スルカラ f ハ topologische Abbildung デアル。即チ $\mathfrak{F}$ ハ Cantor－集合ノ部分集合 M ト homöomorph デアル。

—— 以上 ——

定理 4. Cantor－集合ハ任意ノ nulldimensionaler Kompaktum 全体へ eindeutig stetig ニ描寫可能デアル。

証明. Cantor-集合ヲ C トシ任意ノ nulldimensionaler Kompaktum ヲ $\mathfrak{F}$ トスル。定理3ニヨリ $\mathfrak{F}$ ハ C ノ部分集合 M ト homöomorph デアル。M ハ明ラカニ C ニ於ケル閉集合デアル。従ッテ定理1ニヨリ C ハ M 全体へ eindeutig stetig ニ寫セル。次ニ M ヲ $\mathfrak{F}$ へ topologisch ニ寫セバヨイ。——以上——

$\boxed{\text{準同形定理(i)}}$ Kern ヲ有スル nulldimensionaler Kompaktum ハ任意ノ nulldimensionaler Kompaktum 全体へ eindeutig stetig ニ描寫可能デアル。

証明. 定理2ニ依ッテ核ヲ有スル0次元 Kompaktum ハ Cantor-集合全体へ一意連続ニ寫ル。定理4ニ依テ Cantor-集合ハ任意ノ0次元 Kompaktum 全体へ一意連続ニ寫ル。——以上——

$\boxed{\text{準同形定理(ii)}}$ Kern ヲ有セザル nulldimensionaler Kompaktum $\mathfrak{F}_1$ ガ nulldimensionaler Kompaktum $\mathfrak{F}_2$ 全体へ eindeutig stetig ニ描寫デキルタメニ必要且ツ十分ナル條件ハ $\mathfrak{F}_2$ モ Kern ヲ有セズ且ツ

(i) $\mathfrak{F}_2$ ノ頂点ノ次数ガ $\mathfrak{F}_1$ ノ頂点ノ次数ヨリ小ナルカ

(ii) 両者ノ頂点ノ次数相等シキトキハ $\mathfrak{F}_2$ ノ頂点ノ個数ガ $\mathfrak{F}_1$ ノ頂点ノ個数ヨリ大ナラザルコトデアル。

証明. 必要ナルコトハ核ヲ有スル $\mathfrak{F}$ ハ非可算集合デ核ヲ有セザル $\mathfrak{F}$ ハ可附番集合ナルコトト前掲拙文（大塚数學,

5巻1号，３０頁）中ノ定理12ノ必要條件カラ明ラカデ十分ナルコトモ同ジク同定理ノ十分條件カラ明ラカデアル。　——以上——

(註) $\mathfrak{F}$ ノ topologische Dichtigkeit $D(\mathfrak{F})$ トデモ言フ様ナモノヲ考ヘテソノ大小ヲ次ノ様ニ決メル：

(i) $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ 共ニ核ヲ有スルトキハ $D(\mathfrak{F}_1) = D(\mathfrak{F}_2)$

(ii) $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ ハ逐次導来集合ヲ作ツテユクトキ何レカ一方ノ頂点ガ表ハレタトコロノ濃度ノ大小デ決メル。

スルト上ノ準同形定理 (i), (ii) ハ次ノ様ニモ書ケル：
$\mathfrak{F}_1$ ガ $\mathfrak{F}_2$ 全体ヘ eindeutig stetig ニ描寫デキルタメノ必要十分條件ハ $D(\mathfrak{F}_1) \geqq D(\mathfrak{F}_2)$ ナルコトデアル。

（昭和十二年一月三十一日書終ル）