541. 非同次型線狀移動可能函數方程式ニ就テ(Ⅴ)

北川　敏男（阪大）

5. 同題(Ⅳ)[1]ニ於テ函數方程式(1)ヲ $-\infty<x<\infty$ デ解カウトシタガ，ソノアトヲ續ケヤウトスルトキ幾多ノ困難ニ出遭フ。ソレデ、ソレハ一應撤回シテ、コレカラ，$0<x<\infty$ デ解クコトヲ考ヘル。

又(4)ニ於テ，コヽデハ

$$(4')\qquad g_1(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}g(\xi)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}e^{iu(x-\xi)}\varrho_A(u)\,du\right\}d\xi$$

ヲトル。コレノ existence ハ假定(2)ヲ用ヰレバ容易ニワカル。尚，$\varrho_A(u)$ ハ(Ⅳ)ト同樣ニエラブノデアルが，(7)ノ代リニ

$$(7')\qquad 0<A<A+\delta\leqq\eta<1$$

(1) 本誌，第115号，522番。本文デ述ベタ如ク、(Ⅴ)デハ(Ⅳ)ト違ッタ $g_1(x)$，$g_2(x)$ ヲトル。尚(Ⅳ)ニ於ケル $g_1(x)$，$g_2(x)$ ハ i デ割ッタモノヲ採用スルコトヲ要スル。又(Ⅳ)(4)ニ於イテ $\xi-x$ ハ $x-\xi$ トシナケレバナラナイ。

ナル様ニ、Aトδトヲエランデオクコトニスル。ソコデ與ヘラレタ函数方程式

(1) $\Gamma_x f(t) = g(x) \qquad (x>0)$

ヲ解ク問題ヲ

(15) $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$

トワケテ

(12) $\Gamma_x f(t) = g_1(x) \qquad (x>0)$

(13) $\Gamma_x f(t) = g_2(x) \qquad (x>0)$

ナル二ツノ函数方程式ヲ解ク問題ニナホス。前者ノ解ヲ$f_1(x)$, 後者ノ解ヲ$f_2(x)$トスルトキ，$f_1(x)+f_2(x)$ヲ以テ求メル解タラシメヨウトイフノが吾々ノ目標デアル。

茲デ$g_1(x)$及ビ$g_2(x)$ハ夫々$g(x)$ノ low 及ビ high frequency component ヲ（一ツノ特別ナ$\varphi_A(u)$ニヨッテ）表シテキル。

(12)ニ関シテハ(IV)§ノ議論ヲ復活サセレバヨイ。但シ，(10)ハ次ノ如ク、改メテ見直サナケレバナラナイ。

(10′) $$\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu^{k} g_1^{(\nu)}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu^{k} \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty g(\xi)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(iu)^\nu e^{iu(x-\xi)}\varphi_A(u)\,du\right\}d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty g(\xi)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu^{k}(iu)^\nu e^{iu(x-\xi)}\varphi_A(u)\,du\right\}d\xi$$

茲デuニ関スル積分ハ實ハ$\left(-(A+\delta),\ A+\delta\right)$ノ範囲ニ限ラレタコトデアリ、又(6)及ビ(7′)ノ成立ヲ想起スレバ，summation ト積分トノ交換可能ハ容易ニワカル。

更ニ(10′)ノ両辺ニΓヲ施セバ，同様ノ根據カラ§3ノ

結果ヲウル。

依ッテ以下(13)ノ解ヲ考ヘル。

6. 補助定理 1.

$$(16)\quad g_2(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} g^{(m)}(\xi)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iu(x-\xi)}}{(iu)^m}\left(1-\varphi_A(u)\right)du\right\}d\xi$$

証明. 今 x ト C トヲ任意ノ実数トスル。§2 (5) ニ依ッテ

$$(17)\quad \int_c^x\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} g(\xi)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{iu(t-\xi)}\varphi_A(u)\,du\right\}d\xi\right\}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} g(\xi)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iu(x-\xi)}-e^{iu(c-\xi)}}{iu}\varphi_A(u)\,du\right\}d\xi$$

次ニ,

$$(18)\quad \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iu(x-\xi)}-e^{iu(c-\xi)}}{iu}\varphi_A(u)\,du$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iu(x-\xi)}-e^{iu(c-\xi)}}{iu}\left(1-\varphi_A(u)\right)du$$

$$+\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iu(x-\xi)}-e^{iu(c-\xi)}}{iu}\,du$$

ナル分解ヲ施シ, 更ニ

$$(19)\quad \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} g(\xi)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iu(x-\xi)}-e^{iu(c-\xi)}}{iu}\,du\right\}d\xi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^c+\int_c^x+\int_x^{\infty}\right\}g(\xi)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iu(x-\xi)}-e^{iu(c-\xi)}}{iu}du\right\}d\xi$$

$$=\int_0^x g(\xi)\,d\xi$$

ヲ得ル。從ツテ吾人ノ得ルトコロハ

IV. 今 $R(\lambda)>0$ ニ對シテハ，　（$\alpha_n \to \infty$）

$$\frac{e^{\lambda x}}{G(\lambda)}=\sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{\lambda(x-\alpha_n)} \tag{20}$$

ナル展開が成立シタトスル。然ルトキ，Bochner ニヨリ形式的ニツクッタ

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n g_2(x-\alpha_n) \tag{21}$$

ハ (2) ノ形式解ヲ與ヘル。サテ (21) ハ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{2\pi}\int_0^{\infty} g^{(m)}(t)\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\varphi_A(u)}{(iu)^m} e^{iu(x-\alpha_n-t)} du\right]dt \tag{22}$$

ニ外ナラナイ。(22) ノ existence が示サレナケレバナラナイ。

ソノタメニ，先ヅ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\varphi_A(u)}{(iu)^m} e^{iu(\tau-\alpha_n)} du = K(\tau) \tag{23}$$

トオク。コヽニ summation が、τ ノ任意ノ有限區間デ一様收斂ナルコトハ

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\varphi_A(u)}{(iu)^m} e^{iu(\tau-\alpha_n)} du = o\left((\tau-\alpha_n)^{-k}\right) \tag{24}$$

トナルコトが、任意ノ positive number k ニ對シテ云ヘルノデアルカラ、$k=k(\alpha_n)$ トシテ

$$\alpha_n^{k(\alpha_n)} \geqq n^2 A_n \tag{25}$$

ナル様ニ、$k(\alpha_n)$ ヲトッテ考ヘルト明カデアル。

従ツテ問題ハ

$$(26) \quad \int_0^\infty g^{(m)}(t)\,\mathbb{K}(x-t)\,dt$$

ノ existence ニ移ル。

8. 今話ノ便宜上

$$(27) \quad \Gamma f(x) = \int_0^1 f(x+t)\,dp(t)$$

従ツテ

$$(28) \quad G(\lambda) = \int_0^1 e^{\lambda t}\,dp(t)$$

ナル特別ナ形デアタヘラレタ場合ヲ考ヘル。(27) ハ $f(x+t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ ノ一様ノ linear aggregate デアル。

(以下ノ議論ハ (27) ナル形ニ限ラズ、モット一般ノ linear aggregate デモ成立スルコトハ、ソノ経過ヲ看レバ明カデアル。)

サテ (26) ノ existence ヲ示スノニ、有限区間ハ問題ニナラナイ。(26) ノ existence ヲミルニハ、

$$\int_{x+1}^\infty g^{(m)}(t)\,\mathbb{K}(x-t)\,dt$$

ダケヲ問題トスレバ足リル。ソノタメニ、$\mathbb{K}(\tau)$ $(\tau < -1)$ ノ behaviour ヲ調ベルコトニスル。

9. 其ノタメニ $\mathbb{K}(\tau)$ ノ点 x_0 (<-1) ニ於ケル Cauchy 展開ノ section (contour $\mathbb{C}$ ニ関スル) ヲ考ヘルニ

$$(29)\quad \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathfrak{C}} \frac{e^{\lambda x}}{G(\lambda)e^{\lambda x_0}} \Gamma_\tau\left[e^{\lambda\tau}\int_0^\tau \mathrm{K}(x_0+\xi)e^{-\lambda\xi}d\xi\right]d\lambda \left(=\underset{say}{\mathrm{I}_c}\right)$$

トシテコレハ表ハサレル。(23)ガ τ ノ任意ノ有限區間デ一様收斂ナルガ故ニ，

$$\Gamma_\tau\left[e^{\lambda\tau}\int_0^\tau \mathrm{K}(x_0+\xi)e^{-\lambda\xi}d\xi\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}A_n\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iu(x_0-t-\alpha_n)}[G(iu)-G(\lambda)]}{(iu-\lambda)(iu)^m}(1-\varphi_A(u))du$$

依ツテ

$$(30)\quad \mathrm{I}_c=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathfrak{C}}\frac{e^{\lambda x}}{G(\lambda)e^{\lambda x_0}}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iu(x_0-t-\alpha_n)}G(iu)}{(iu-\lambda)(iu)^m}(1-\varphi_A(u))du\right\}d\lambda$$

ニ等シイ。

$$(31)\quad \mathrm{I}_c=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathfrak{C}}\frac{e^{\lambda x}}{G(\lambda)e^{\lambda x_0}}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n}{2\pi}\int_0^{\prime\prime}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iu(x_0-t-\alpha_n+\xi)}}{(iu-\lambda)(iu)^m}du\right]dp(\xi)\right\}d\lambda$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathfrak{C}}\frac{e^{\lambda x}}{G(\lambda)e^{\lambda x_0}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n}{2\pi}\int_0^{\prime\prime}\left\{\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iu(x_0-t-\alpha_n+\xi)}\varphi_A(u)}{(iu-\lambda)(iu)^m}du\right]dp(\xi)\right\}d\lambda$$

$$=\mathrm{I}_c^{(1)}+\mathrm{I}_c^{(2)}\quad(say)$$

トナル。コレラハ案外簡単ナモノニナル。