# 540. Riemann 空間ノ等長変換ノ解析性

吉田　耕作 (阪大)

Riemann 空間 R ノ metric $ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\, dx^i dx^j$ ガ i) 点 $x = (x^1, x^2, \text{------}, x^n)$ ノ近傍デ positive definite ii) $g_{ij}(x)$ ハ $x$ ノ近傍デ $(x^1, x^2, \text{------}, x^n)$ ノ解析函數ト假定スル。

然ラバ二点 $a, b$ ガ充分近イトキニハ $a, b$ ヲ結ブ最短曲線 $C(a, b)$ ガ一ツ唯一ツ存在シ，之レハ geodesic ノ方程式 ( Euler's differential equation ) ニヨッテ定義サレル。

今 $x' = Tx$ ヲ以テ上ノ i), ii) ノ満足サレル範囲デ定義サレタ等長変換トスレバ，T ニヨッテ geodesics $C(a,b)$ ハ geodesics $C(a', b')$ ニ変換サレル。

点 $x$ 及ビ $x'$ ニ於テ normal coordinates (geodesic coordinates) ヲ導入スル。$x$ ノ近傍ハ $n$ 次元ゆーくりっど空間 $E(\bar{x})$ ノ点 $\bar{x}$ ノ近傍ニ topological ニ寫サレ，$x$ ヲ通ル geodesics ハ $\bar{x}$ ヲ通ル直線ニ寫サレル。ヨッテ T ハ $E(\bar{x})$ ノ $E(\bar{x}')$ ヘノ変換 $\bar{T}$ ヲ induzieren スル。$\bar{T}$ ニヨリ $\bar{x}$ ヲ通ル直線ハ $\bar{x}'$ ヲ通ル直線ニ変換サレ，且ツ $\bar{T}$ ハ $\bar{x}$ ヲ通ル各直線上デ isometric。

故ニ若シモ $\bar{T}$ ガ $\bar{x}$ ニ於テ conform ナコトガワカレ

バ，$\mathrm{T}$ガ *linear transformation* ナルコトガ直＝ワカル。$x$ノ近傍＝オイテ $R$ ノ座標ト *normal coordinates* トノ對應トハ明ラカ＝ *analytic* (i), ii) ＝ヨル) ダカラ，結局

<u>$x'=\mathrm{T}x$ ハ解析変換デアル</u>。

次＝ *conformity* ノ証。 $x$＝於ケル任意ノ小 *geodesic triangle* $xyz$ ヲ考ヘル。但シ長サ $(y,x)=(z,x)$ トスル。之レ＝對應スル $x'y'z'=\mathrm{T}(xyz)$ モ亦小 *geodesic triangle* デアル。之レ等ノ $\mathrm{E}(\bar{x})$，$\mathrm{E}(\overline{x'})$ ＝於ケル像ヲ $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$，$\bar{x}'\bar{y}'\bar{z}'$ トスル。$\overline{xy}$，$\overline{xz}$，$\overline{x'y'}$，$\overline{x'z'}$ ハ直線デ長サ等シイ。*geodesic triangle* ＝對スル公式＝ヨレバ *higher order* ヲ *neglect* スレバ角 $\angle\overline{y}\overline{x}\overline{z}$ ( *in* $\mathrm{E}(\bar{x})$) ＝對シテ

$$* \quad (y,z)^2=(x,y)^2+(x,z)^2-2(x,y)(x,z)\cos\angle\overline{y}\overline{x}\overline{z} \\ -\frac{3}{4}KS(x,y)(x,z)\sin\angle\overline{y}\overline{x}\overline{z}$$

ガ成立スル。(例ヘバ *E. Cartan* ノ *Riemann* 幾何ノ本，*p.* 233)

コヽ＝ $K$ ハ三角形 $xyz$ ノ方向ノ *Riemann*，$S$ ハ三角形 $xyz$ ノ *area*。之レヲ我々ノ二等辺 *g. t.* ＝ *apply* スレバ

$$\cos\angle\overline{y}\overline{x}\overline{z}=\lim\frac{(y,z)^2-2(x,y)^2}{2(x,y)^2}$$

($y$ガ *geodesic* $C(y,x)$ ＝沿フテ $x$＝ *tend* スルトキノ *limes*) ヲ得ル。$xyz$，$x'y'z'$ ハ互＝ *isogonal*

ダカラ

$$\cos\angle\overline{y}\,\overline{x}\,\overline{z} = \cos\angle\overline{y'}\,\overline{x'}\,\overline{z'}.$$

—— 以上 ——