538. 函數方程式

$$f(x,y)+f(x+y,z)=f(x,y+z)+f(y,z)$$

ニ就イテ。III

角谷静夫（阪大）

次ニ R ガ n 次元 Euclid 空間ナル場合ヲ考ヘル。

$f(x,y)$ ガ x,y ニ関シテ對稱デアレバ上ニ述ベタ如ク

$$f(x,y)+f(x+y,z)=f(x,y+z)+f(y,z) \cdots\cdots (1)$$

ヲ満足スルモノハ

$$f(x,y)=\varphi(x+y)-\varphi(x)-\varphi(y) \quad \cdots\cdots (3)$$

ニ限ルコトガワカル。然ルニ一般ノ $f(x,y)$ ハ

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\{f(x,y)+f(y,x)\}+\frac{1}{2}\{f(x,y)-f(y,x)\}$$
$$=f_1(x,y)+f_2(x,y)$$

トオケバ

$$f_1(x,y)=f_1(y,x)$$
$$f_2(x,y)=-f_2(y,x)$$

トナリ又(1)ニ於テ x ト z トヲ入レカヘテ右辺ト左辺トヲ入レカヘレバ

$$f(y,x)+f(z,x+y)=f(y+z,x)+f(z,y) \quad \cdots\cdots (24)$$

トナルカラ $\frac{1}{2}\big((1)+(24)\big)$ 及ビ $\frac{1}{2}\big((1)-(24)\big)$ ヲ作ルコトニヨッテ

$$f_1(x,y)+f_1(x+y,z)=f_1(x,y+z)+f_1(y,z)$$
$$f_2(x,y)+f_2(x+y,z)=f_2(x,y+z)+f_2(y,z)$$

ヲ得ル。即チ f_1, f_2 ハ何レモ (1) ヲ満足スル。故ニ f_1 ノ方ハ既ニ知レタ如ク (3) ノ形ヲモツコトガワカル。ヨッテ結局 (3) ヲ條件

$$f(x,y)+f(y,x)=0 \quad \cdots\cdots (25)$$

ノ下デ解クコトニナル。

先ヅ (1) ニ於テ $z=x$ トオキ、(25) ヲ用フレバ

$$f(x,y)=f(x,x+y) \quad \cdots\cdots (26)$$

ヲ得ル。コレヨリ (25) ヲ用フレバ

$$f(x,y)=f(x+y,y) \quad \cdots\cdots (27)$$

ヲ得ル。

次ニ (1) ニ於テ $y=x$ トオケバ $f(x,x)=0$ ナルコトヨリ

$$f(2x,z)=f(x,x+z)+f(x,z)$$
$$=2f(x,z) \qquad [(26)ニヨル]$$

ヲ得ル。一般ニ

$$f(mx,z)=mf(x,z) \qquad (m\text{ハ正整数})\cdots\cdots(28)$$

デアレバ (1) ニ於テ $y=mx$ トオクコトニヨリ

$$f(x,mx)+f((m+1)x,z)=f(x,mx+z)+mf(x,z)$$

然ルニ (26) ヲ m 回繰返ヘシテ用フレバ

$$f(x,mx)=f(x,0)=0$$
$$f(x,mx+z)=f(x,z)$$

デアルカラ、コレハ

$$f((m+1)x,z)=f(x,z)+mf(x,z)$$
$$=(m+1)f(x,z)$$

ヨツテ (28) ハ任意ノ正整数 m ニ對シテ成立スル。

更ニ (1) ニ於テ $y=-x$ トオケバ

$$f(x,-x)=f(x,-x+z)+f(-x,z)$$
$$=f(x,z)+f(-x,z) \qquad [(26)ニヨル]$$

然ルニ左辺ニ (26) ヲホドコセバ

$$f(x,-x)=f(x,0)=0$$

デアルカラ、結局

$$f(-x,z)=-f(x,z)$$

ヲ得ル。コレト (28) ト $f(x,z)$ ノ連続性トヲ用フレバ、

任意ノ實數 a（正，0 又ハ負）ニ對シテ

$$f(ax, y) = af(x, y) \text{ ------------------ } (29)$$

ナルコトガワカル。コレヨリ

$$f(x, ay) = af(x, y) \text{ ------------------ } (30)$$

モ直チニ得ラレル。

n 次元空間 R_n ノ点ヲ

$$x = (x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) = (x_1, x_1^*)$$

$$y = (y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n) = (y_1, y_1^*)$$

トスレバ x_1^*, y_1^* ハ $(n-1)$ 次元空間 R_{n-1} ノ点ト考ヘルコトガ出來ル。

(29), (30) ヲ用フレバ

$$f(x, y) = x_1 \cdot y_1 \cdot f\left(\left(1, \frac{x_2}{x_1}, \cdots, \frac{x_n}{x_1}\right), \left(1, \frac{y_2}{y_1}, \cdots, \frac{y_n}{y_1}\right)\right)$$

$$= x_1 y_1 f\left(\left(1, \frac{x_1^*}{x_1}\right), \left(1, \frac{y_1^*}{y_1}\right)\right)$$

トナルカラ

$$f((1, P), (1, Q)) \equiv g(P, Q) \text{ ------------------ } (31)$$

（但シ P, Q ハ共ニ R_{n-1} ノ点ヲ表ハスモノトス）

トオケバ

$$f(x, y) = x_1 y_1 g\left(\frac{x_1^*}{x_1}, \frac{x_2^*}{x_2}\right)$$

トナル。次ニ $g(P, Q)$ ノ性質ヲシラベル。

(a) $g(P, Q)$ ハ P, Q ガ R_{n-1} 内ノ直線 l ノ上ヲ動クトキ $\overrightarrow{PQ}$ ノ長サ $L(\overrightarrow{PQ})$（方向モ考ヘニ入レテ）ニ比例ス

ル。即チ

$$g(P,Q)=k(l)\cdot L(\overrightarrow{PQ})$$

証明．　P, Q, R ガ R_{n-1} 内ノ一直線上ニアルモノトスル。

$$L(\overrightarrow{PR}):L(\overrightarrow{RQ})=\mu:\lambda,\quad \lambda+\mu=1$$

トオク。

$$g(P,Q)=f((1,P),(1,Q))=\frac{1}{\lambda\mu}f((\lambda,\lambda P),(\mu,\mu Q))$$

$$=\frac{1}{\lambda\mu}f((\lambda,\lambda P),(\lambda+\mu,\lambda P+\mu Q))\quad [(26)\text{ニヨル}]$$

$$=\frac{1}{\mu}f((1,P),(1,\lambda P+\mu Q))=\frac{1}{\mu}g(P,R)$$

即チ

$$\mu\cdot g(P,Q)=g(P,R)$$

同様ニ(27)ヲ用フレバ

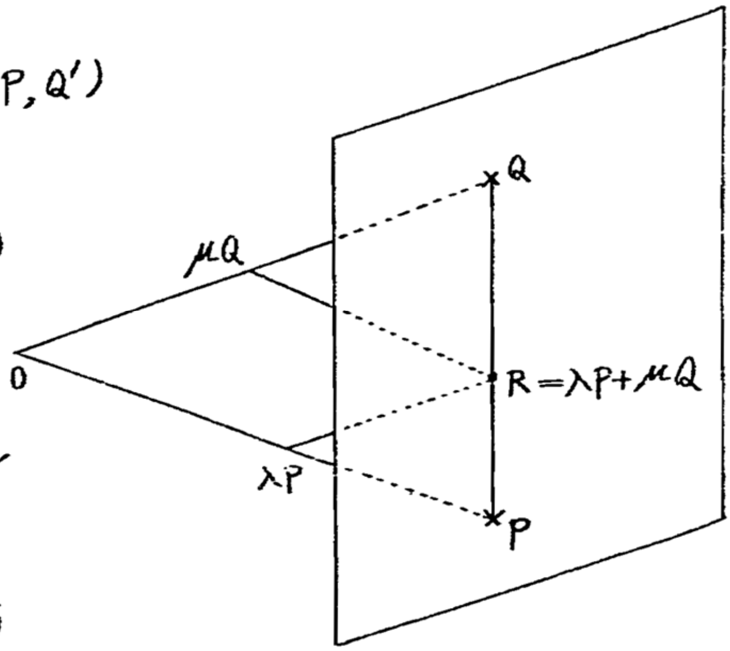
$$\lambda\cdot g(P,Q)=g(R,Q)$$

ヲ得ル。コレヨリ一般ニ P, Q, P′, Q′ ガ一直線上ニアレバ

$$g(P,Q)=\frac{L(\overrightarrow{PQ})}{L(\overrightarrow{PQ'})}\cdot g(P,Q')$$

$$=\frac{L(\overrightarrow{PQ})}{L(\overrightarrow{P'Q'})}\cdot g(P',Q')$$

ヲ得ル。



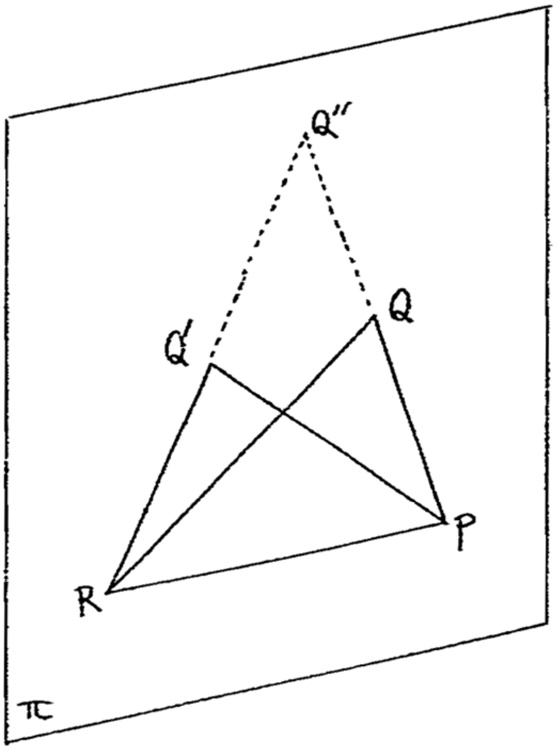
(b) R_{n-1} 内ニアル二次元ノ平面 π ヲトリ π 上ニ底辺ヲ共有シテ高サノ等シイ二ツノ三角形

PQR, PQ′R

ヲ取レバ

$$g(P,Q)+g(Q,R)=g(P,Q')+g(Q',R) \quad \cdots\cdots (32)$$

ガ成立スル。



証明：

PQ ト RQ' トノ交ハリヲ Q'' トスル。

$$PQ : QQ'' = RQ' : Q'Q'' = \mu : \lambda$$

トオク。R_n 内ノ三点

$(\lambda, \lambda P)$, $(\mu, \mu Q'')$

$(\lambda, \lambda R)$

ヲ考ヘ、コレヲ x, y, z ト考ヘテ (1) ニ代入スレバ f ノ性質 (29)(30) 及ビ g ノ定義 (31) ヨリ

$$\lambda\mu g(P,Q'')+\lambda g(\lambda P+\mu Q'', R) = \lambda g(P, \mu Q''+\lambda R)+\lambda\mu g(Q'',R)$$

然ルニ (a) ニヨツテ知ル如ク

$$\mu g(P,Q'')=g(P,Q), \quad \mu g(Q'',R)=g(Q',R)$$

デアルカラコレヨリ (32) ヲ得ル。 (証明終)

(c) π上ニアル三角形 PQR ニ對シテ

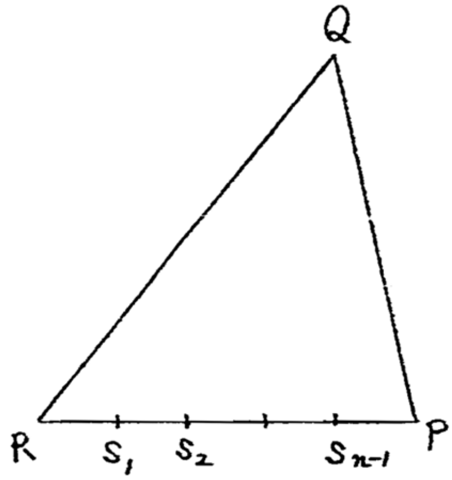
$$\mathfrak{S}(\Delta)=g(P,Q)+g(Q,R)+g(R,P)$$

トオケバ $\mathfrak{S}(\Delta)$ ハ Δ ノ面積ニ比例スル。即チ

$$\mathfrak{S}(\Delta)=C(\pi)\cdot A(\Delta) \quad \cdots\cdots (33)$$

但シ $A(\Delta)$ ハ Δ ノ面積，$C(\pi)$ ハ π ノミニ *depend* スル常数デアル。シカラ $\overrightarrow{PQRP}$ ハ一定ノ方向ニマハルモノトスル。

証明： 先ヅ(b)ヨリ、底辺ヲ共通シテ高サノ等シイ二ツノ三角形 Δ, Δ' ニ對シテハ $\mathfrak{S}(\Delta)=\mathfrak{S}(\Delta')$ デアル。然ルニ一ツノ平面π上ノ面積ノ等シイ二ツノ三角形 Δ, Δ' ハ適當ニ有限個ノ三角形 $\Delta_0=\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \cdots\cdots, \Delta_{n-1}, \Delta_n=\Delta'$ ヲ撰ンデ Δ_i ト Δ_{i+1} $(i=0,1,2,\cdots\cdots,n-1)$ ガ一辺ヲ共通シテソノ辺ニ對スル高サガ等シイ様ニスルコトガ出來ル*カラ任意ノ面積ノ等シイ二ツノ三角形 Δ, Δ' ニ對シテ $\mathfrak{S}(\Delta)=\mathfrak{S}(\Delta')$ デアル。



次ニ ΔPQR ノ底辺 RP ヲ $S_0=R, S_1, \cdots\cdots, S_{n-1}, S_n=P$ ニヨツテn等分スレバ

$$\mathfrak{S}(PQR)=\sum_{i=0}^{n-1}\mathfrak{S}(S_{i+1}QS_i)$$

トナリ $A(S_{i+1}QS_i)$ ハ何レモ等シイカラ $\mathfrak{S}(S_{i+1}QS_i)$ ハ何レモ等シイ。故ニ

$$\mathfrak{S}(PQR)=n\,\mathfrak{S}(S_1QR).$$

---

*. 二ツノ三角形 Δ, Δ' ガ一辺ヲ共通シテソノ共通辺ニ對スル高サガ等シイトキニ $\Delta\sim\Delta'$ デアルトシ $\Delta\sim\Delta', \Delta'\sim\Delta''$ ナラバ $\Delta\sim\Delta''$ デアルト假定スレバ面積ガ等シイ二ツノ三角形 Δ, Δ' ハ $\Delta\sim\Delta'$ デアル。

$nA(S_1QR)=A(PQR)$ デアルカラ

$$A(\Delta)=nA(\Delta')$$

ナルトキハ

$$\mathfrak{S}(\Delta) = n\,\mathfrak{S}(\Delta')$$

ヲ得ル。 $\mathfrak{S}(\Delta)$ ガ $A(\Delta) \longrightarrow 0$ ナルトキ $\rightarrow 0$ ナルコト

ハ容易ニワカルカラ、コレヨリイツモノ様ニシテ

$$\mathfrak{S}(\Delta) = c(\pi)\cdot A(\Delta) \quad \text{------------------} (33)$$

ヲ得ル。（証明終）