537. Goldbach ノ Vermutung ノ實驗的研究

小 林 宇 五 郎（熊本）

§1. 問題トイフノハ1742年ニ Christian Goldbach（當時 Moscau）ト Leonhard Euler（當時 Berlin）トノ間ニ交ハサレタ書翰ノ中ニアッタモノデアル。問題ノ要点ハ次ノ通リデアル。

即チ「任意ノ偶數ハ二ツノ素數ノ和トナル」

尤モ 4＝2＋2 ノ場合ヲ除ケバ問題ハ次ノ樣ニ表ハサレル。

「Jede gerade Zahl lässt sich in die Summe von Zwei ungeraden Primzahlen zerlegen.」

コノ問題ガ未ダ解決サレナイノハ問題自身ノムヅカシサモアラウガ、一面ニハ加法的數論（additive Zahlentheorie）ノ發達ノ遲レヲ意味スルモノト思フ。

コノ問題ニツイテハ

Landau: Zahlentheorie, Bd. I. S.S. 183—234
末綱博士： 岩波講座 ごるどばっはノ問題（全部デ22頁）

等デ大体ノ輪廓ガ窺ハレル。

前者ハ Hardy-Littlewood ノ定理ヲ中心ニシテ論ジテアリ、後者ハ Schnirelmann ノ定理，1930 ヲ中心ニシテ論ジテアル。

§2. R. Haussner ハ 10,000 迄ノ偶數ニツイテ、コノ豫想ノ正シイコトヲ験算ニヨッテ確メタ (1897)
コノコトハ藤原博士: 代數學第一巻 132 頁ニ一寸書カレテアル。

私ハ 5,000 迄ノ所デ同氏ノ Arbeit ヲ見テヰルガ (5,002 カラ 10,000 迄ノ所ハ發表シテアルカドウカ知ラナイ) ココデハ自分ノ験算ヲ基礎ニシテ 10,000 迄ノ大体ノ模様ヲ發表シタイト思フ。

[Haussner ノ發表ニハ所々小サナ誤リガアル様デアルガ私ノ計算ニハ、モット大キナ誤リガアリハセヌオト恐レテヰル。]

§3. 素數ノ個數 (1 ハ非素數、2 ハ素數)

正數 x ヲ超エザル素數ノ數ヲ $\pi(x)$ デ表ハス。

即チ素數ヲ表ハスニ p ヲ以テスレバ

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$$

x ト $\pi(x)$ トノ関係ハ下ノ通リ。

x	$\pi(x)$
1000	168
10000	1229
50000	5133
100000	9592
500000	41538
1000000	78498
2000000	148933
5000000	348513
10000000	664579
20000000	1270607
90000000	5216954
100000000	5761455
1000000000	50847478

10,000 以下ヲ詳シク書クト

區　　間	素數ノ數
1—1000	168
1000—2000	135
2000—3000	127
3000—4000	120
4000—5000	119
5000—6000	114
6000—7000	117
7000—8000	107
8000—9000	110
9000—10000	112
1—10000	1229

§4. 分解度數 (die Anzahl der Zerlegungen)

正ノ整數 n ニツイテ $n=p+p'$ (p, p' ハ素數) ナル表ハシ方ノ數ヲ $f(n)$ デ表ハシ、コレヲ n ノ分解度數ト呼ブコトニスル。

例. $60=7+53=13+47=17+43=19+41$

$=23+37=29+31$

即チ 60 ヲ二ツノ素數ノ和ニ分解スル仕方ハ 6 通リアル、即チ $f(60)=6$

場所ヲトルカラ、ココデハ 100 ノ倍數ノ分解度數表ヲ 10,000 迄示スコトニスル。

$2n$	$f(2n)$
100	6
200	8
300	21
400	14
500	13
600	32
700	24
800	21
900	48
1000	28
1100	28
1200	54
1300	33
1400	34
1500	67
1600	36
1700	34
1800	75
1900	36
2000	37
2100	97
2200	46
2300	49
2400	90
2500	47

$2n$	$f(2n)$
2600	49
2700	100
2800	64
2900	52
3000	104
3100	61
3200	54
3300	120
3400	62
3500	64
3600	125
3700	66
3800	70
3900	140
4000	65
4100	67
4200	164
4300	80
4400	81
4500	138
4600	71
4700	75
4800	150
4900	94
5000	76

$2n$	$f(2n)$
5100	166
5200	90
5300	82
5400	156
5500	97
5600	96
5700	186
5800	98
5900	89
6000	178
6100	100
6200	86
6300	216
6400	96
6500	105
6600	198
6700	104
6800	100
6900	206
7000	118
7100	106
7200	197
7300	113
7400	100
7500	205

$2n$	$f(2n)$
7600	117
7700	141
7800	232
7900	111
8000	106
8100	230
8200	121
8300	119
8400	270
8500	124
8600	116
8700	242
8800	125
8900	117
9000	242
9100	163
9200	138
9300	261
9400	137
9500	134
9600	259
9700	121
9800	147
9900	301
10000	127

§5. 上ノ表ハ$2n$ヲ100毎ニ取ッテキルカラ、次ノ事ハ目ニツカナイガ、實際ニハ$f(6n)$ハ$f(6n+2)$, $f(6n+4)$ニ比シテ甚ダシク大デアルコトガワカル。

多分 $\dfrac{f(6n)}{f(6n+2)} \longrightarrow 2,\quad \dfrac{f(6n)}{f(6n+4)} \longrightarrow 2$

ガ云ヘルデアラウ。（Goldbach ノ問題ガ解決ツイタ時ニハ）

例.

$2n$	$f(2n)$
1002	36
1004	18
1006	18
1008	42
1010	25
1012	23
1014	39
1016	18
1018	20

$2n$	$f(2n)$
2004	59
2006	35
2008	28
2010	84
2012	27
2014	35
2016	73
2018	28
2020	41

コノ事實ハ表ヲ作ッテ直グニ目ニツクコトデアルガ、コノ傾向ノアルコトハ次ノ定理カラ説明出來ル。

(1) 2ト3ヲ除ケバ、スベテノ素數ハ$6n+1$, $6n+5$（$n=0,1,2,3,\text{--------}$）ノ何レカノ形ヲシテヰル。

(2) 算術級數中ノ素數ニ關スル Landau ノ定理

① $(k, l) = 1$ ナルトキ

$$\pi(x; k, l) = \sum_{\substack{p \leqq x \\ p \equiv l \pmod{k}}} 1 = \frac{1}{\varphi(k)} \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left(x e^{-\alpha\sqrt{\log x}}\right)$$

ココデ $\varphi(k)$ ハ Euler 函数

O ハ Landau ノ記号

回 従ッテ

$(k, l_1) = 1$, $(k, l_2) = 1$ ナル時

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x; k, l_1)}{\pi(x; k, l_2)} = 1$$

(3)
$$\begin{cases} (6n+1) + (6m+1) = 6N+2 \\ (6n+1) + (6m+5) = 6N \\ (6n+5) + (6m+1) = 6N \\ (6n+5) + (6m+5) = 6N+4 \end{cases}$$

§6. 分解度数函数 $f(2n)$ ハ實験的ニハ $2n$ ノ増加ニツレテ次第ニ増加シテ行ク（大勢カラシテ）ノが見ラレル。

<u>10000 以下ノ偶数 $2n$ ニ対シテ</u> $f(2n) > 0$

デアルコトハ、勿論判ッタが更ニ次ノコトが成立スル。

$$\begin{cases} f(2n) \geqq 10 & \text{für} \quad 2n > 428 \\ f(2n) \geqq 20 & \text{für} \quad 2n > 1412 \\ f(2n) \geqq 30 & \text{für} \quad 2n > 2672 \\ f(2n) \geqq 40 & \text{für} \quad 2n > 3296 \end{cases}$$

等。

Goldbach ノ Vermutung が正シイト断定サレタ

暁ニハ、ソノ分解度数ニツイテハ多分上ノ不等式ガソノマヽ成立スルコトデアラウ。

§7. $f(n)$ ノ満足スル関係式ニツイテ

(1) $$f(n) < \frac{cn}{\log^2 n} \prod_{p/n} \left(1+\frac{1}{p}\right) \qquad (c\text{ ハ常数})$$

之レハ前記ノ末綱博士ノ書物ノ S.18 ニアル。Schonirelmann ノ定理ノ基礎ニナッテキル。

(2) $f(n)$ ト π 函数ノ間ノ関係式

$$f(2n) = \frac{1}{2}\sum_{t=3}^{t=n-2}\left[\pi(2t+1) - 2\pi(2t-1) + \pi(2t-3)\right]\pi(2n-2t-1)$$

$$+\frac{1}{2}\pi(2n-5) + \frac{\varepsilon}{2}$$

但シ ε ハ n ガ素数ナルカ否カニ従ッテ1或ハ0トス。

イ. 証明

$\pi(2r+1) - \pi(2r-1)$ ハ $2r+1$ ガ素数ナルトキハ1、非素数ナルトキハ0. $(2r-1 \geqq 3)$

又、$2f(2n)-\varepsilon$ ハ $2n$ ヲ二ツノ素数ノ和ニ分解スル時ニ使用サレルスベテノ素数ノ個数ヲ表ハス。

$\therefore\ 2f(2n)-\varepsilon$

$$= \{\pi(2n-3)-\pi(2n-5)\} + \{\pi(2n-5)-\pi(2n-7)\}\{\pi(5)-\pi(3)\}$$

$$+\{\pi(2n-7)-\pi(2n-9)\}\{\pi(7)-\pi(5)\} + \cdots\cdots$$

$$+\{\pi(5)-\pi(3)\}\{\pi(2n-5)-\pi(2n-7)\} + \{\pi(2n-3)-\pi(2n-5)\}$$

$$= [\pi(2n-3)-2\pi(2n-5)+\pi(2n-7)]\pi(3)$$

$$+[\pi(2n-5)-2\pi(2n-7)+\pi(2n-9)]\pi(5)$$

$$+\cdots\cdots$$

$$+[\pi(7)-2\pi(5)+\pi(3)]\pi(2n-7)$$

$$+\pi(2n-5)$$

$$=\sum_{t=2}^{n-2}[\pi(2t+1)-2\pi(2t-1)+\pi(2t-3)]\pi(2n-2t-1)$$

$$+\pi(2n-5)$$

ロ. $[\pi(2t+1)-2\pi(2t-1)+\pi(2t-3)]$

ハ之レ自身一ツノ函數ト考ヘルト　($t\geqq 3$)

$$\begin{cases} 2t+1\text{ が素數、}2t-1\text{ が非素數ノ時ハ }1. \\ 2t+1\text{ が非素數、}2t-1\text{ が素數ノ時ハ }-1. \\ 2t+1,\ 2t-1\text{ が共ニ素數カ共ニ非素數ノ時ハ }0. \end{cases}$$

ハ. コノ關係式ハ $f(2n)$ ノ研究ヲ π 函數ノ研究ニ移スニ過ギナイ。

―― 以上 ――