532. 函數方程式 $f(x,y)+f(x+y,z)=f(x,y+z)+f(y,z)$ ニ就イテ, II

角谷　靜夫（阪大）

次ニ (x,y) ナル實數ノ pair ヲ考ヘ

$$(x,y)\oplus(x',y')=(x+x'+f(y,y'),\ y+y')$$

ニヨッテ (x,y) ト (x',y') トノ和 $(x,y)\oplus(x',y')$ ヲ定義スル。(x,y) 全体ガコノ $\oplus$ ニヨッテ abelian group ヲ作ッテヰルコトガ容易ニワカル。即チ

$$f(y,y')=f(y',y)$$

ヨリ

$$(x,y)\oplus(x',y')=(x',y')\oplus(x,y)$$

ヲ得。

$$f(y,y')+f(y+y',y'')=f(y,y'+y'')+f(y',y'')$$

ヨリ

$$\big((x,y)\oplus(x',y')\big)\oplus(x'',y'')=(x,y)\oplus\big((x',y')\oplus(x'',y'')\big)$$

ヲ得ル。$(0,0)$ ハ group ノ單位元デ (x,y) ノ inverse ハ $(-x+f(y,-y),\ -y)$ デアル。

コノ abelian group ヲ $\mathfrak{G}$ トスレバ $\mathfrak{G}$ ハ明カニ二次元デ separable, locally compact, locally connected デ且ツ connected デアルカラ Pontrjagin ノ定理ニヨリ

Vector group ト torsidal group トノ direct

product ニ topologically isomorphic デアル。然ルニ $\mathfrak{G}$ ガ compact ナ subgroup ヲ含マナイコトハ明カデアルカラ $\mathfrak{G}$ ハ Euclid 空間（今ノ場合ハ二次元）ノ addition ノ group ト topologically isomorphic デアル。

依ッテ適當ニ座標ノ変換 T ヲホドコセバ之レハ addition ノ group トナラネバナラヌ。

$$T(x, y) = \big(P(x, y), Q(x, y)\big)$$

トオケバ

$$P(x, y) + P(x', y') = P\big(x + x' + f(y, y'), y + y'\big) \quad \cdots\cdots (10)$$

$$Q(x, y) + Q(x', y') = Q\big(x + x' + f(y, y'), y + y'\big)$$

ガ成立シナケレバナラナイ。

(10) ニ於テ $y' = 0$ トオケバ $f(y, 0) = 0$ ヨリ

$$P(x, y) + P(x', 0) = P(x + x', y) \quad \cdots\cdots (11)$$

更ニ (11) ニ於テ $y = 0$ トオケバ

$$P(x, 0) + P(x', 0) = P(x + x', 0)$$

コレヨリ $P(x, 0)$ ガ x ニ関シテ連續ナルコトヲ用フレバ

$$P(x, 0) = cx \quad \cdots\cdots (12)$$

トナル。(11) ニ於テ $x = 0$ トオキ (12) ヲ代入シテ x' ノ代リニ x ト書ケバ、

$$P(x, y) = cx + P(0, y)$$

トナル。コレヲ (10) ニ代入スレバ

$$P(0, y) + P(0, y') = cf(y, y') + P(0, y + y')$$

又ハ

$$f(y,y')=\frac{-1}{c}\left\{P(0,y+y')-P(0,y)-P(0,y')\right\}$$

故ニ　$\varphi(y)=-\frac{1}{c}P(0,y)$ トオケバ

$$f(y,y')=\varphi(y+y')-\varphi(y)-\varphi(y')$$

ヲ得ル。

上記ノコトハ $f(x,y)$ ノ変域 R ガ實數全体デナクテ一般ノ n 次元空間 R_n デアル場合デモ、$f(x,y)$ ガ x,y ニ関シテ對稱デ函數方程式 (1) ヲ満足シテ居レバ成立スル。(x,y) ヲ考ヘルトキニ x ヲ実數，y ヲ R_n ノ element トスレバヨイ。

シカシ R ガ實数全体ノ場合ニハ、コレハ continuous group ノ理論ヲ用ヒナクテモ直接ニ次ノ如クスレバ得ラレル。

今

$$f(y,y')=\varphi(y+y')-\varphi(y)-\varphi(y') \quad \cdots\cdots\cdots (13)$$

ヲ満足スル如キ $\varphi(y)$ ガ存在スルモノト見當ヲツケ、コノ $\varphi(y)$ ヲ逆ニ $f(y,y')$ ヲ用ヒテ定義シテ行ク。

先ヅ $\varphi(y)$ ガ solution デアレバ $\varphi(y)+cy$ (c: constant) モ亦 solution デアルコトハ明ラカデアルカラ $\varphi(1)$ ハ任意ニ定メルコトが出來ル。

依ッテ

$$\varphi(1)=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (14)$$

トオク。次ニ

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

トオク。コレハ $y=y'=\frac{1}{2}$ ナルトキ (13) が成立スルヤウニシタノデアル。

更ニ

$$\varphi\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$$

$$=-\frac{1}{4}f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$$

一般ニ

$$\varphi\left(\frac{1}{2^n}\right)=-\frac{1}{2^n}f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2^{n-1}}f\left(\frac{1}{2^2},\frac{1}{2^2}\right)$$

$$-\cdots\cdots\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^n}\right) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

トオク。コレラハ何レモ $y=y'=\frac{1}{2^n}$ ナルトキニ (13) が成立スルヤウニシタノデアル。

次ニ

$$\varphi\left(\frac{2k+1}{2^n}\right)=\varphi\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right)+\varphi\left(\frac{1}{2^n}\right)+f\left(\frac{k}{2^{n-1}},\frac{1}{2^n}\right)$$

$$k=1,2,\cdots\cdots,\ 2^{n-1}-1\ ;\ n=1,2,\cdots\cdots$$

ニヨツテ $\varphi\left(\frac{2k+1}{2^n}\right)$ ヲ順次定義シテ行ケバ、$\varphi(r)$ ハ bi rational number ニ對シテ定義サレソノ範囲ニ於イテ

$$\varphi(r_1,r_2)-\varphi(r_1)-\varphi(r_2)=f(r_1,r_2) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

ヲ満足シテヰル。コノコトハ帰納法ヲ用ヒテ証明スルコトが出來ルが

$$(x, y) \oplus (x', y') = (x + x' + f(y, y'), y + y')$$

ニヨッテ addition ヲ定義サレタ group ニ於テ

$$\xi\left(\frac{1}{2^n}\right) \equiv \left(\varphi\left(\frac{1}{2^n}\right), \frac{1}{2^n}\right)$$

ガ $(0, 1)$ ナル element ノ 2^n 乘根デアリ

$$\xi\left(\frac{2k+1}{2^n}\right) = \xi\left(\frac{k}{2^{n-1}}\right) \oplus \xi\left(\frac{1}{2^n}\right)$$

ニヨッテ $\xi\left(\frac{2k+1}{2^n}\right)$ ガ定義サレテ居リ，且ツ (17) ガ

$$\xi(r_1 + r_2) = \xi(r_1) \oplus \xi(r_2)$$

ト equivalent デアルコトヲ考ヘレバ容易ニワカル。

ヨッテ此ノ如ク birational number r ニ對シテ定義サレタ $\varphi(r)$ ガ real number 全体ニ連續ニ拡張出来ルコトヲ証明スレバヨイ。

コノタメニハ $0 \leqq r \leqq 1$ ナル birational number ノ範囲デ定義サレタ函數 $\varphi(r)$ ガソコニテ一樣連續ナルコトヲ示セバ十分デアル。

然ルニ

$$\varphi(r+h) - \varphi(r) = f(r, h) + \varphi(h)$$

デ $f(r, h)$ ハ r ガ有界ナルトキ $h \to 0$ ト共ニ一樣ニ 0 トナルカラ（$f(r, h)$ ハ r, h ノ連續函數デ $f(r, 0) = 0$ デアル）コレヲ示スタメニハ $\lim_{h \to 0} \varphi(h) = 0$ ガ、h ガ birational number ヲ通ッテ行クトキニ成立スルコトヲ示セバ十分デアル。

今 $f(y, y')$ ハ $(0, 0)$ ニ於イテ連續デ $f(0, 0) = 0$

デアルカラ

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}\right)=0$$

ナルコトハ明カデアル。ヨッテ (16) ヨリ

$$\lim_{n\to\infty} \varphi\left(\frac{1}{2^n}\right)=0 \quad \text{------} \quad (18)$$

ナルコトモ明カデアル。故ニ若シ

$$\lim_{r\to 0} \varphi(r)=0 \qquad r: \text{birational}$$

ガ成立シナイトスレバ

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \varphi(r_n) = a \neq 0 \\ &\lim_{n\to\infty} r_n = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{------} \quad (19)$$

ナル birational number ノ系列 $\{y_n\}$ ガ存在スル。

$a>0$ ト仮定シテモ一般性ヲ失ハナイ。（$a<0$ ナラバ f, φ ノ附号ヲ全部逆ニスレバヨイ）

(18), (19) ヨリ、$\{y_n\}$ ノウチニ少クトモ一ツノ y_0 ガ存在シテ

$$\frac{1}{2^n} < y_0 < \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \varphi(y_0) > \frac{a}{2}, \quad \varphi\left(\frac{1}{2^n}\right) < \frac{a}{4},$$

$$\varphi\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) < \frac{a}{4} \quad \text{------} \quad (20)$$

ガ成立スルコトガワカル。シカモ n ヲ十分大キク取ッテ

$$\left.\begin{array}{l} |x| \leqq \dfrac{1}{2^{n-1}}, \quad |y| \leqq \dfrac{1}{2^{n-1}} \\ \text{ナルトキニハ} \\ |f(x,y)| < \dfrac{a}{8} \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (21)$$

が成立スルヤウニ出来ル。

$$y_0 = \frac{k}{2^{m+n}}, \qquad 2^m < k < 2^{m+1}$$

トオキ、p, q ヲ夫々

$$\left.\begin{array}{l} \begin{cases} \varphi\left(\dfrac{i}{2^{m+n}}\right) > \dfrac{a}{2}, & i = k-1, k-2, \cdots\cdots, p+1 \\ \varphi\left(\dfrac{p}{2^{m+n}}\right) \leqq \dfrac{a}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} \varphi\left(\dfrac{j}{2^{m+n}}\right) > \dfrac{a}{2}, & j = k+1, k+2, \cdots\cdots, q-1 \\ \varphi\left(\dfrac{q}{2^{m+n}}\right) \leqq \dfrac{a}{4} \end{cases} \end{array}\right\} \cdots\cdots (22)$$

ナル如ク取ルコトが出来ル。シカモ

$$2^m \leqq p < k < q \leqq 2^{m+1}$$

デアル。今

$$\Phi(t) \equiv f\left(t, \frac{k-p}{2^{m+n}}\right) + \varphi\left(\frac{k-p}{2^{m+n}}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots (23)$$

トオケバ、コレハ t ノ連続函数デ (17), (22) ヲ用フレバ

$$\Phi\left(\frac{p}{2^{m+n}}\right) = \varphi\left(\frac{k}{2^{m+n}}\right) - \varphi\left(\frac{p}{2^{m+n}}\right) > \frac{a}{2} - \frac{a}{4} = \frac{a}{4} > 0$$

$$\Phi\left(\frac{p+(q-k)}{2^{m+n}}\right)=\varphi\left(\frac{q}{2^{m+n}}\right)-\varphi\left(\frac{p+(q-k)}{2^{m+n}}\right)$$
$$\leqq\frac{a}{4}-\frac{a}{2}<0$$

トナルカラ

$$\Phi(t_0)=0,\quad \frac{p}{2^{m+n}}<t_0<\frac{p+(q-k)}{2^{m+n}}<\frac{q}{2^{m+n}}$$

ナル t_0 ガ存在スル。コノ t_0 ニ對シテ (23) ヨリ

$$\varphi\left(\frac{k-p}{2^{m+n}}\right)=-f\left(t_0,\frac{k-p}{2^{m+n}}\right)$$

ガ成立スル。コレヲ用ヒルト

$$\varphi\left(\frac{k}{2^{m+n}}\right)=f\left(\frac{p}{2^{m+n}},\frac{k-p}{2^{m+n}}\right)+\varphi\left(\frac{k-p}{2^{m+n}}\right)+\varphi\left(\frac{p}{2^{m+n}}\right)$$
$$=f\left(\frac{p}{2^{m+n}},\frac{k-p}{2^{m+n}}\right)-f\left(t_0,\frac{k-p}{2^{m+n}}\right)+\varphi\left(\frac{p}{2^{m+n}}\right)$$

然ルニ

$$\left|\frac{p}{2^{m+n}}\right|,\ \left|\frac{k-p}{2^{m+n}}\right|,\ |t_0|,\ \leqq\frac{q}{2^{m+n}}<\frac{1}{2^{n-1}}$$

デアルカラ (21) ヨリ

$$\left|f\left(\frac{p}{2^{m+n}},\frac{k-p}{2^{m+n}}\right)\right|,\ \left|f\left(t_0,\frac{k-p}{2^{m+n}}\right)\right|<\frac{a}{8}$$

デアリ、又 (22) ヨリ

$$\varphi\left(\frac{p}{2^{m+n}}\right)\leqq\frac{a}{4}$$

デアルカラ

$$\varphi(y_0)=\varphi\left(\frac{k}{2^{m+n}}\right)<\frac{a}{8}+\frac{a}{8}+\frac{a}{4}=\frac{a}{2}$$

コレハ (20) ニ矛盾スル。ヨツテ $\lim_{r\to 0}\varphi(r)=0$ デナケレバナラヌ。