527. 円，球ノ幾何ニツイテ

松村宗治（台北大）

(I) 自分ハ台大理農學部紀要第五巻 p.306 デ $\cos 2\varphi$, $\tan^2\varphi$ 等ノ公式ヲノベテ置イタガ、尚ソレニ類スルモノヲコヽデ述ベヨウ。（記号ノ意味ハ毎々ノ通リデアル）

$$\cos^2\varphi = T^{\alpha\beta}\rho_\alpha \rho_\beta$$

ヨリ

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \cos^2\varphi \, d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi} T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta \, d\varphi$$

$$\therefore \quad \left[\frac{1}{2}\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4} \right]_{\varphi_0}^{\varphi} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta \, d\varphi$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_0) + \frac{1}{4}\left(\sin 2\varphi - \sin 2\varphi_0 \right)$$

$$= \int_{\varphi_0}^{\varphi} T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta \, d\varphi \quad \text{-------------} (1)$$

又

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} \cos\varphi \, d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta} \, d\varphi$$

$$\sin\varphi - \sin\varphi_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{T^{\alpha\beta} \rho_\alpha \rho_\beta} \, d\varphi \quad \text{--------} (2)$$

(1) ト (2) ガ吾々ノ公式デアル。

(II) n 次元空間ニ於ケルニツノ球 $\mathfrak{z}(u, v)$, $\xi(u, v)$ ハ互ニ垂直ニナリ且ツ其等ノ微小変換セシモノガマタ垂直ナラバ

$$\left(\mathfrak{z}(u+\delta u, v+\delta v), \xi(u+du, v+dv) \right) = 0$$

デアル、コレヲ Taylor ノ級數ニヨリテ展開シ

$$(\mathfrak{z}\xi) + \left(\mathfrak{z} \frac{\partial \xi}{\partial u} \right) du + \left(\mathfrak{z} \frac{\partial \xi}{\partial v} \right) dv + \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial u} \xi \right) \delta u$$

$$+ \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial v} \xi \right) \delta v + \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial u} \right) du \, \delta u$$

$$+ \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial v} \frac{\partial \xi}{\partial u} \right) du \, \delta v + \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial v} \right) \delta u \, dv$$

$$+\left(\frac{\partial \eta}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)dv\,\delta v=0$$

而シテ此ノ第一項ハ假定ニヨリ零化スルヲ以テ上ノ最後ノ式ハ下ノ樣ニナル。

$$\left(\eta\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)du+\left(\eta\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)dv+\left(\frac{\partial \eta}{\partial u}\xi\right)\delta u$$

$$+\left(\frac{\partial \eta}{\partial v}\xi\right)\delta v+\left(\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)du\,\delta u$$

$$+\left(\frac{\partial \eta}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial u}\right)du\,\delta v+\left(\frac{\partial \eta}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)\delta u\,dv$$

$$+\left(\frac{\partial \eta}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v}\right)dv\,\delta v=0$$

此ノ式カラ分ルヤウニ考フル球ノ近傍デハ上ノ微小變移ハ二方向アルコトデアル。

(III) *Radon* ガ *Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ.* V, S. 45 デ考ヘテイル D-Netze ヲコヽデ考ヘ、考フル表面ガ円系表面デアッテ parameter ヲ適當ニトル(x, y ヲ各々ノ t, τ ニトル)ト次ノ関係ガ成立ツ(記号ハイツモノ通リデアル)

$$(1)\qquad \frac{(\theta_t\theta_t)}{1}=\frac{(\theta_t\theta_\tau)}{p}=\frac{(\theta_\tau\theta_\tau)}{p^2+q^2}$$

但シ $(\theta_\tau\theta_\tau)=1$ デアルカラ (1) ヨリ

$$p=\frac{(\theta_t\theta_\tau)}{(\theta_t\theta_t)},\quad q=\frac{\sqrt{(\theta_t\theta_t)-(\theta_t\theta_\tau)^2}}{(\theta_t\theta_t)}$$

トナリ D-Netze ガ横ハッテイル表面ノ表面ハ下ノ公式デ與ヘラル。

$$(2) \quad \iint \frac{\sqrt{(\theta_t\theta_t)-(\theta_t\theta_\tau)^2}}{(\theta_t\theta_t)}\,dt\,d\tau$$

尚亦吾人ノ表面ノ Minimalkurven ハ

$$(3) \quad \frac{(\theta_t\theta_\tau)}{(\theta_t\theta_t)} \pm i\,\frac{\sqrt{(\theta_t\theta_t)-(\theta_t\theta_\tau)^2}}{(\theta_t\theta_t)} = \mathrm{const.}$$

デ與ヘラル、コヽニ $(\theta_t\theta_t)$, $(\theta_t\theta_\tau)$, $(\theta_\tau\theta_\tau)$ ハ吾人ノ円系表面ノ基本量デアッテ今マデモ度々用イタ所ノモノデアル、又 $i=\sqrt{-1}$ デアル。

尚亦 Abh. aus dem Math. Seminar der Hamb. Univ. IV, S. 318ヨリ分ル様ニ

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{(\theta_\tau\theta_\tau)U-(\theta_t\theta_\tau)V}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)-(\theta_t\theta_\tau)^2}}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{(\theta_t\theta_\tau)U-(\theta_t\theta_t)V}{\sqrt{(\theta_t\theta_t)(\theta_\tau\theta_\tau)-(\theta_t\theta_\tau)^2}}\right)$$

ハ Strahlennetz ニ對スル條件デアル、コヽニ U, V ハ吾々ノ円系表面上ノ Ortsfunktionen デアル。

(IV) N次元空間内ノ球 $\mathfrak{z}$ ヲ考ヘ u ヲ Parameter トシ

$$(1) \quad \mathfrak{z}^\alpha = \mathfrak{z}^\alpha(u), \quad \alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \cdots\cdots n;$$

$$u_1 \leqq u \leqq u_2$$

ヲ以テ円ヲ表ス、但シ $n<N$ デアル。

此ノ (1) ナル円系空間ニテ

(2) $t=\int_{u_1}^{u_2} F(\mathfrak{x}, \dot{\mathfrak{x}})\, du$

ヲ以テ (1) ノ Arc length デアルト定義スル。

而シテ (2) ヲ

(3) $dt^2 = f_{\alpha\beta}(\mathfrak{x}, d\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x}^\alpha d\mathfrak{x}^\beta$

ト置ク。

然ルトキハ contravariant vector ξ ノ長サ l ハ次ノヤウニ定義セラレル。

$$l^2 = f_{\alpha\beta}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, \xi^\alpha \xi^\beta$$

コヽニ $\mathfrak{y}$ ハ $d\mathfrak{x}$ ト同ジ方向ヲ有スル Vector デアル。

又二ツノ vector ξ, η ノ間ノ角ハ

$$\cos(\eta, \xi) = \frac{f_{\alpha\beta}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, \xi^\alpha \eta^\beta}{\sqrt{f_{\alpha\beta}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, \xi^\alpha \xi^\beta}\, \sqrt{f_{\alpha\beta}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})\, \eta^\alpha \eta^\beta}}$$

デ與ヘラレル、尚コノ場合ノ Christoffel symbols ハ

$$[\alpha\beta, \mu] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_{\alpha\mu}}{\partial \mathfrak{x}^\beta} + \frac{\partial f_{\beta\mu}}{\partial \mathfrak{x}^\alpha} - \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial \mathfrak{x}^\mu}\right)$$

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = f^{\lambda\mu}[\alpha\beta, \mu]$$

デアル、コヽニ $f^{\lambda\mu}$ ハ $f_{\mu\lambda}$ ニ對應スル $f_{\alpha\beta}$ ノ reciprocal matrix ノ原素デアル。

カクノ如ク普通ノ様ニシテ取扱ハレルコトニナル。