525. Le Principe du maximum ニ就イテ

南　　右　内（札幌一中）

定義　函數 $f(z)$ ヲ任意ノ領域 D ニ於テ定義セラレタ函數トシ，D ノ縁ノ点 ζ 及ビ D 内ヨリ ζ ニ收斂スル点列 $\{z_n\}$ ヲ取リ

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) \qquad \left(\lim_{n\to\infty} z_n = \zeta,\ z_n \in D\right)$$

ヲ考ヘル。点列 $\{z_n\}$ ヲ種々ニ変化シテ得ル上ノ極限値（存在スルモノダケヲ考ヘ）ノ集合ヲ $C(\zeta)$ ト表ハシ，コレヲ ζ ニ對スル Cluster set ト稱ス。

集合 B ニ對シ B ヲ analytic curve Γ ニテ包ミ，ソレニ含マレル点集合ヲ $A_\Gamma(B)$ ト表ハス。

定理.　$f(z)$ ハ次ノ性質ヲ有ス。

1°　$f(z)$ ハ任意ノ領域 D ニ於テ正則デアル。

2°　$f(z)$ ハ D ノ縁ノ近傍デハ有界デアル。

然ルトキハ D ノ各点ニ對シテ

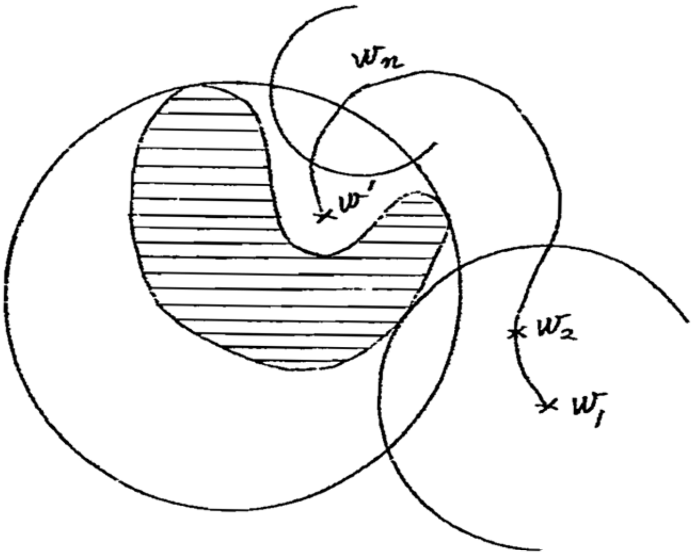
$$f(z) \in A_\Gamma\left(\sum{}' C(\zeta)\right)$$

若シ D ノ一点デ $f(z) \in \Gamma$ ナラバ $f(z)$ ハ常數デアル。

但シ $\sum{}'$ ハ D ノ縁カラ有限個ノ点ヲ除ク点ニ関スル和ヲ表ハス。

証明.

1.　D ガ有界ナル場合



先ヅ $f(z)$ ハ D デ有界デアル、故ニ常數Mガ存在シテ D ノ各点ニ對シテ $|f(z)| \leqq M$ ガ成立スル。

今若シ D ノ一点 z' ニ對シテ

$$w' = f(z') \in A_r(\Sigma' C(\zeta))$$

トセヨ。

然ルトキハ w-plane ニ於テ原点ヲ中心、半徑Mノ円ヲ $K(0 \cdot M)$ ト表ハセバ $K(0 \cdot M)$ ノ外ノ一点 w_1 ト w' トハ $A_r(\Sigma' C(\zeta))$ ト共有点ヲモタナイ。Jordan curve (長サノアル) デ結ブコトが出來ル。

今 $\qquad \rho(w_1, K(0 \cdot M)) = \rho_1'$

$$\rho(w_1, A_r(\Sigma' C(\zeta))) = \rho_1$$

トシテ $W = F(w) = \dfrac{1}{w - w_1}$ ナル変換ヲ施ス、然ラバ $F\{f(z)\}$ ナル函數ハ D ノ各点デ定義セラレ

1° $F\{f(z)\}$ ハ D デ正則

2° D ノ縁デ $z_1, z_2, \cdots\cdots, z_n$ ヲ除キテ ζ ヲトレバ D 内ヨリ ζ ニ收斂スル点列 $\{z_n'\}$ ニ對シテ

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|F\{f(z'_n)\}\right| \leqq \frac{1}{\rho_1} \quad \left(\lim_{n\to\infty} z'_n = \zeta,\ z'_n \in D\right)$$

3° $z_1, z_2, \text{-------}, z_n$ ノ近傍デハ有界。

特ニ $\left|F\{f(z)\}\right| \leqq \frac{1}{\rho'_1}$

従ツテ良ク知ラレタル *Lindelöf* ノ *maximum principle* ニ依リ D ノ凡テノ点デ

$$\left|F\{f(z)\}\right| \leqq \frac{1}{\rho_1}$$

即チ $\quad |f(z) - w_1| \geqq \rho_1$

故ニ $f(z)$ ハ w_1 ヲ中心トシテ ρ_1 ヲ半径トスル円ノ内部ニハ入ラナイ。

次ニ $K\left(w_1, \frac{\rho_1}{2}\right)$ ト J トノ交点ノ内 w_1 カラ一番遠キモノヲ w_2 トスル。

$$\rho\left(w_2, A_\Gamma\left(\Sigma' C(\zeta)\right)\right) = \rho_2$$

トヲキ $F_1\left\{f(z)\right\} = \dfrac{1}{f(z) - w_2}$ ナル函数ニ付テ前今様ノ原理ニヨリ D ノ凡テノ点ニ對シ

$$|f(z) - w_2| \geqq \rho_2$$

ガ成立スル。即チ $f(z)$ ハ $K(w_2, \rho_2)$ ノ外ニアル。

以下同様ニシテ順次 $w_3, w_4, \text{-------}, w_n, \text{-------}$ ヲ求メテ行ク、然ルトキハ J ニ沿フテノ $w_1 w'$ ノ距離ヲ ρ トスレバ w' ハ $K(w_1, \rho_1), K(w_2, \rho_2), \text{-------}, K(w_n, \rho_n)$. ノ外ニアルカラ

$$\rho \geqq \overline{w_1 w_2} + \overline{w_2 w_3} + \cdots + \overline{w_{n-1} w_n} = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2 + \text{-------} + \rho_{n-1})$$

然ルニ Γ ト $A_r(\Sigma' C(\zeta))$ トノ最小距離ヲ δ トスレバ

$$\rho_1+\rho_2+\cdots\cdots+\rho_{n-1} \geqq (n-1)\delta$$

$$\therefore \quad \rho \geqq \frac{n-1}{2}\delta$$

Dノ凡テノ点ニ對シ $f(z)$ ハ

$$K(w_1,\rho_1),\ K(w_2,\rho_2),\ \cdots\cdots,\ K(w_n,\rho_n),\ \cdots\cdots$$

ノ外ニアル、即チ w' ハ $K(w_n,\rho_n)$ $(n=1,2,\cdots\cdots,n\cdots)$ ノ外ニアル。

即チ n トハ無関係ニ $\rho \geqq \frac{n-1}{2}\delta$ デナケレバナラナイ、之レハ矛盾ナリ。

從ッテDノ凡テノ点デ $f(z)\in A_r(\Sigma' C(\zeta))$ ガ成立スル。

次ニ D ノ内点ニ於イテ $w'=f(z_1)\in\Gamma$ ノ場合ヲ考ヘル、コノトキ若シモ $f(z)$ ガ常數デナケレバ $w=f(z)$ ハDデ正則ナル故、一点 w_1 ノ適當ナ近傍 $\nabla(w_1)$ ヲ作リ、ソコニ一点 w' ヲトレバ

$$w'=f(z')$$

ヲ満足スル z' ハ z_1 ノ近傍、即チ D 内ニ存在スルヤウニ出來ル。

然ルニ $w_1\in\Gamma$ ナル故 $\nabla(w_1)$ ハ $A_r(\Sigma' C(\zeta))$ ニハ含マレナイ点ヲ含ム。

今ソレヲ w' トスレバ $w'=f(z')$ ナル z' ハD内ニアルカラ D 内ノ一点 z' ニ對シ、ソレニ對應スル w' ハ $A_r(\Sigma' C(\zeta))$ ノ外ニアルコトニナル、之レハ上ノ証明ニヨルDノ凡テノ点デ $f(z)\in A_r(\Sigma' C(\zeta))$ ナリトノコト

ニ矛盾スル。

2. Dガ有界デナイ場合

(A) R－Dガ内点ヲ有スルトキ

内点ノ一ツヲaトスレバ $Z=\dfrac{1}{z-a}$ ナル変換ヲ施セバD八有界ナ領域$\mathcal{D}$トナル。

函数 $f\left(\dfrac{1+Za}{Z}\right)$ ヲ $\mathcal{D}$ ニ於イテ考フレバ上ト同様ノコトガ言ヘル。

(B) R－Dガ内点ヲ有セザルトキ

Dヨリ一ツノ円(ソノ周ヲSトス)ヲ除キタル領域ヲD'トス。

然ラバ D' ニ於テハ(A)ノ場合トナルカラD'ノ凡テノ点デ

$$f(z)\in A\left(\Sigma' C(\zeta)+\sum_{\xi\in S} C(\xi)\right)$$

次ニ円S内デハ

$$f(z)\in A\left(\sum_{\xi\in S} C(\xi)\right)$$

從ツテ D ノ凡テノ点デ

$$f(z)\in A\left(\Sigma' C(\zeta)+\sum_{\xi\in S} C(\xi)\right) \text{------------} (1)$$

然ルニ $\sum_{\xi\in S} C(\xi)\subset\Sigma' C(\zeta)$ ガ成立スル、何トナレバ若シ然ラズトセバ一点ξアリテ $C(\xi)\,\overline{\in}\,\Sigma' C(\zeta)$ ナラザルベカラズ、然ルニξニ於テハ $f(z)$ 八正則ナル故

$$C(\xi)=f(\xi)$$

$f(\xi)$ノ十分近傍ヲトレバ ξ ノ近傍デノ $f(z)$ ノ値域ヲ被ハレル。然ルニ $f(\xi)$ ノ如何ナル近傍モ $A\left(\Sigma' C(\zeta)+\sum_{\xi\in S} C(\xi)\right)$

ニハナイ点ヲ含ム。

之レハ (1) ト矛盾スル。

從ッテ $\sum_{\xi\in S} C(\xi) \subset \sum' C(\zeta)$ デアル。

故ニ D ノ凡テノ点デ

$$f(z)\in A_r\left(\sum' C(\zeta)\right)$$

以上デ証明ガ終了シタノデアリマスガ

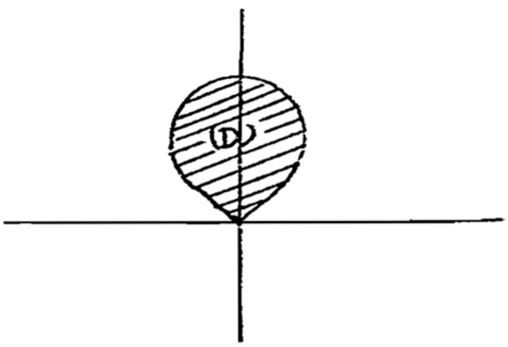
Riemann ノ寫像定理ヲ用ヒテ Γ ノ内部ヲ單位円ノ内部ニ一對一等角ニ寫像シ、單位円ニ於テ前ノ *Lindelöf* ノ *principle* ヲ用ヒ、然ル後 Γ ノアル平面ニ逆寫像ヲ行ヘバ証明出來ルヤウニ思ハレルガソレハ出來ナイ。何トナレバ Γ ノ外ノ点ヲモ考ヘネバナラナイカラ。

一般ニ「原点ヲ中心トスル円ノ内デ正則デコノ円内ニアル *analytic curve* Γ ヲ考ヘ，Γ ノ内部ヲ單位円ノ内部ニ一對一等角ニ寫像スル函數ハ存在シナイ。」

コトガ証明サレル。

次ニ上ノ定理ニ於テ最後ノ $f(z)\in\Gamma$ ヲ $f(z)\in\sum' C(\zeta)$ トシタイノデアルガ、ソレガ不可能デアルコトハ次ノ例ヨリ明ラカデアル。

$f(z)=e^{\frac{1}{z}}$ トシ、D トシテ原点ヲ縁ニ含ミ、y 軸上ノ点ヲ内点トシテ含ミ且ツ D デハ $f(z)$ ガ有界デアル如キ領域 D ヲトル。



ソレニハ $z=re^{i\theta}$ トシテ D デハ $\frac{1}{r}\cos\theta \leqq M$ (M ハ常

數）ガ成立スル如クスレバ十分デアル。

然ルトキハ

1° $f(z)$ ハDデ正則ナリ。

2° Dノ縁ノ近傍デハ有界。

デアルガ Dノ一ツノ点 z ニ對シテ $f(z) \in C(0)$ ナル如キ z ガ存在ス。ソレハ

$$z_1 = \frac{1}{\theta} e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad z_2 = \frac{1}{\theta + 2\pi} e^{i\frac{\pi}{2}}, \cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots, z_n = \frac{1}{\theta + 2n\pi} e^{i\frac{\pi}{2}}, \cdots\cdots\cdots$$

トスレバ

$$f(z_1) = e^{\frac{1}{z_1}} = e^{i\theta}, \cdots\cdots, f(z_n) = e^{\frac{1}{z_n}} = e^{i(\theta + 2n\pi)}$$
$$= e^{i\theta}$$

∴ 斯様ナ点列 $\{z_n\}$ ニ對シテ

$$\lim_{n \to \infty} f(z_n) = e^{i\theta}$$

故ニ　$e^{i\theta}$ ハ $C(0)$ ノ一点ナリ。

即チ z_1 ハ一ツノ内点デ

$$f(z_1) = e^{i\theta} \in C(0)$$

ナレドモ $f(z)$ ハ常數デハナイ。