

# 513. 函數展開ノ一形式ト其收斂問題(II)

北川 敏 男 (阪大)

5. 茲デハ、最初ノ手掛リトシテ、問題ノ特殊ノ場合デアルトコロノ *Bessel* 函數ニヨル展開ヲ考ヘル。吾々ノ展開形式ヘ容レルヤウ、問題ヲ *formulate* スルタメ、(I) §4 例 2ニ於ケルカ如ク  $\mathcal{G}[f]$ ,  $f_\lambda(x)$  ヲ定義シ、コレニ應ジテ、§2 [I]—[IX]ノ規約中、[II], [III]ヲ次ノ如ク定メル:

- (II) *Classe* (A)ハ次ノ三條件ヲ充ス函數ノ全体
  - 1°.  $x \geq 0$ ニテ定義サレテ可測。
  - 2°.  $\lim_{x \rightarrow 0} x f(x) = 0$
  - 3°.  $x^{p+1} f(x)$ ガ  $[0, 1]$ デ *Lebesgue* 積分可能。
- Classe* (B)ハ: (A)ニ屬シ  $f(0) = 0$ ナル如キ  $f(x)$ ノ全体。
- Classe* (C)ハ (B)ニ屬シ且ツニ回微分可能ニシテ  $f'(0) = 0$ ナル如キ  $f(x)$ ノ全体。
- (III)  $R(\lambda) > 0$ ナルカ或ハ  $R(\lambda) = 0$ ニシテ且ツ  $J(\lambda) > 0$ ナル如キ  $\lambda$ ノ全体。

然ルトキ、他ノ假定及ビ規約ハ (コノ際) 自ラ定メル。

依ツテ吾々ハ適當ニトツタ *sequence of contours*

$$\{\mathcal{C}_r\} = \text{對シテ}$$

$$(5.1) S_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbb{C}_r} \frac{j_p(-i\lambda^{\frac{1}{2}}, x)}{\delta[j_p(-i\lambda^{\frac{1}{2}}, x)]} \delta[L_{i\lambda^{\frac{1}{2}}, (f(x))}] d\lambda,$$

+ル Contour-integrals, sequence 7 考へル。  
 既=述々々如ク、Bessel-Fourier, Bessel-dlimi,  
 Schlömilch 等、展開ハ、コノ Contour-integrals  
 = 於イテ、lineare fonctionnelle  $S$  7 特殊=  
 トレコト=ヨリ、馴致セラレル。

尚、茲 = d'elsarte [3] = 従キ

$$L_\lambda(f(x)) = \frac{\pi}{2x^p} \int_0^x \xi^{p+1} [Y_p(\lambda x) J_p(\lambda \xi) - J_p(\lambda x) Y_p(\lambda \xi)] f(\xi) d\xi$$

ト置ク。實際 §2 條件 [VIII] 7 充シテキルコトハ Lommel  
 ノ公式ヲ使ツテ示シケル。

6. 計算ノ進路ヲ見透シ良クスルタメ、茲 = 方針ヲ述ベ  
 テ置イタ方がヨカロウト思フ。

以下ノ取扱ヒハ、線狀可遷作用子ノ展開問題 ( §4  
 例 1 参照) 7 論ツタ方法ト思想 = 於イテハ同一デアマル。

即チ

1°. 線狀可遷作用子ノ場合 Contour-integral 7 バ

$$\frac{1}{\pi} \int_a^b f(\xi) \frac{\sin P_r(x-\xi)}{x-\xi} d\xi + W_r$$

ヲ表ハシ、 $W_r$  ハ適當ナ條件ヲ  $A(\lambda) = \text{對シテ與ヘルトキ}$ 、  
 $a + \delta \leq x \leq b - \delta'$  デ一様 = 零 = tend スルヤウ = スレ  
 バ、問題ハ第一項  $r \rightarrow \infty$  ト夫 = 即チ d'limi ノ積分ノ處理

ニ移ッテクルトイフ方法ヲアツタガ、コノ場合 *Dirichlet*ノ積  
 分ノトコロヲ *Bessel* 函数  $J_p(\lambda x) = \text{ヨツテ表ハサレ}$   
 タ特異積分即チ *Hankel*ノ積分ヲ以テスルヤウニ = 変形ス  
 ル。

2° 収斂問題ヲ次ノニツノコトニ關係セシメル:

(i)  $f(x)$  カ何回微分出來ルカ?

(ii)  $A(\lambda)$  ノ *Asymptotic behaviour* 如何?

極ク粗糲ニ言ヒオラスレバ、 $f(x)$  カ微分出來ル回数が  
 高ケレバ高イホド、 $A(\lambda)$  ノ *Asymptotic behaviour*  
 = 對スル要求ハ緩メラレル。収斂定理ヲソノヤウニ = 整理シテ  
 オクコトガ後 = 函数方程式ヲ論ズル際 = 於イテ有效ナル  
 カラ、(i), (ii) ヲ相互ニ反映シ合フヤウニ = 問題ヲ取扱フ。  
 以下、方針ノ荒筋ヲ述べヨウ。

1.  $\mathcal{D}[\mathcal{L}_\lambda(f(x))]$  ノ分解。  $\lambda_1$  ガ  $0 < \text{Arg } \lambda_1 \leq 2\pi$   
 ノ範圍ヲ正ノ方向ニ廻リスルトキ、 $\lambda = -i\lambda_1^{\frac{1}{2}}$  ハ  
 $-\frac{\pi}{2} < \text{Arg } \lambda_1 \leq \frac{\pi}{2}$  ノ範圍ヲ正ノ方向ニ廻ルニトスル。今  
 $\mathcal{L}_\lambda(f(x))$  ノ分解シテ  $0 < \omega < 1$  = トツテ =

$$\mathcal{L}_\lambda(f(x)) = \frac{\pi}{2x^p} \int_0^\omega - \frac{\pi}{2x^p} \int_x^\omega = \mathcal{L}_\lambda^*(f(x)) - \mathcal{L}_\lambda^{**}(f(x))$$

ト置ケル、*fonctionnelle*  $\delta$  ハ *linear* ナカラ、

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{L}_\lambda(f(x))) &= \delta(\mathcal{L}_\lambda^*(f(x))) - \delta(\mathcal{L}_\lambda^{**}(f(x))) \\ &= \delta\left(\frac{\pi}{2x^p} Y_p(\lambda x)\right) \int_0^\omega \xi^{p+1} J_p(\lambda \xi) f(\xi) d\xi \\ &\quad - \delta\left(\frac{\pi}{2x^p} J_p(\lambda x)\right) \int_0^\omega \xi^{p+1} Y_p(\lambda \xi) f(\xi) d\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\delta\left(\frac{\pi}{2x^p}\int_x^\omega \xi^{p+1}\{Y_p(\lambda x)J_p(\lambda\xi)-J_p(\lambda x)Y_p(\lambda\xi)\}d\xi\right) \\
& =K_1(\lambda, f)-K_2(\lambda, f)-K_3(\lambda, f)
\end{aligned}$$

ト置イテ

$$\begin{aligned}
S_r &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{j_p(i\lambda, \frac{x}{2})}{\delta(j_p(i\lambda, \frac{x}{2}))} K_1(-i\lambda, f) d\lambda, \\
& - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{j_p(-i\lambda, \frac{x}{2})}{\delta(j_p(-i\lambda, \frac{x}{2}))} K_2(-i\lambda, f) d\lambda, \\
& - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_r} \frac{j_p(-i\lambda, \frac{x}{2})}{\delta(j_p(-i\lambda, \frac{x}{2}))} K_3(-i\lambda, f) d\lambda,
\end{aligned}$$

コ、デ、右辺第二項ハ *vanish* スル。第一項、第三項ヲ  
 評価スルタメ、——コレヲ夫々  $T_r, U_r$  トオク——,  
 入ヲ用キテ、次ノ如ク表ハス:

$$T_r = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{-2\lambda j_p(\lambda x)}{\delta(j_p(\lambda x))} \delta\left(\frac{\pi}{2x^p} Y_p(\lambda x)\right) \int_0^{\omega} \xi^{p+1} J_p(\lambda\xi) f(\xi) d\xi d\lambda$$

$$U_r = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{-2\lambda j_p(\lambda x)}{\delta(j_p(\lambda x))} K_3(\lambda, f) d\lambda.$$

但シ、 $\widetilde{C}_r$  ハ負ノ虚軸ニ発シテ、第四象限ヨリ第一象限ニ入  
 リ、正ノ虚軸ニ終ル。

8. 諸函数ノ近似展開。Bessel 函数  $J_p(\lambda x), Y_p(\lambda x)$   
 ノ近似展開ニ依ツテ

$$(8.1) \delta[j_p(\lambda x)] = \frac{2^p p!}{2\lambda^{\frac{1}{2}+p}} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ e^{-i\varphi} \delta\left[\frac{e^{i\lambda x}}{x^{p+\frac{1}{2}}} (A_p(\lambda x) + iB_p(\lambda x))\right] \right\}$$

$$+ e^{i\vartheta} \delta \left\{ \frac{e^{-i\lambda x}}{x^{p+\frac{1}{2}}} (A_p(\lambda x) - iB_p(\lambda x)) \right\}$$

$$(8.2) \int \left[ \frac{\pi}{2x^p} Y_p(\lambda x) \right] = \frac{1}{2i\lambda^{\frac{1}{2}}} \frac{\pi}{2} \left( \frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ e^{-i\vartheta} \delta \left\{ \frac{e^{i\lambda x}}{x^{p+\frac{1}{2}}} (A_p(\lambda x) + iB_p(\lambda x)) \right\} \right. \\ \left. - e^{i\vartheta} \delta \left\{ \frac{e^{-i\lambda x}}{x^{p+\frac{1}{2}}} (A_p(\lambda x) - iB_p(\lambda x)) \right\} \right]$$

$$(8.3) J_p(\lambda x) Y_p(\lambda \xi) - J_p(\lambda \xi) Y_p(\lambda x) \\ = \frac{-2}{x\lambda x^{\frac{1}{2}}} (A_p(\lambda x) - iB_p(\lambda x)) \frac{e^{i\lambda(\xi-x)}}{2i\xi^{\frac{1}{2}}} (A_p(\lambda \xi) + iB_p(\lambda \xi)) \\ + \frac{2}{\pi\lambda x^{\frac{1}{2}}} (A_p(\lambda x) + iB_p(\lambda x)) \frac{e^{i\lambda(x-\xi)}}{2i\xi^{\frac{1}{2}}} (A_p(\lambda \xi) - iB_p(\lambda \xi))$$

但シ、 $\vartheta = \vartheta = \frac{p}{2}\pi + \frac{\pi}{4}$  ナリ、 $A_p(x)$ 、 $B_p(x)$ ハ、  
良ク知ラレタ Bessel 函数ノ近似展開

$$J_p(z) \sim \left( \frac{2}{\pi z} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \cos(z - \vartheta) A_p(z) \right. \\ \left. - \sin(z - \vartheta) B_p(z) \right]$$

ニ於テ現ハレルモノ。以上ノ近似展開ハ  $|\text{Arg } \lambda x| < \pi$   
ニ成立スル。

9. 積分  $T_r$ 、 $U_r$ 、處理。係數ヲ整理スルトキ

$$T_r = \frac{1}{2x^p} \int_{\mathcal{C}_r} \lambda J_p(\lambda x) \frac{e^{-i\vartheta} G_-^+ - e^{i\vartheta} G_+^-}{e^{-i\vartheta} G_+^+ + e^{i\vartheta} G_-^-} \left( \int_0^\omega \xi^{p+i} J_p(\lambda \xi) f(\xi) d\xi \right) d\lambda$$

$$U_r = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^p} \int_{\mathcal{C}_r} \lambda^{\frac{1}{2}} J_p(\lambda x) \frac{H(\lambda, f)}{e^{-i\vartheta} G_+^+ + e^{i\vartheta} G_-^-} d\lambda$$

但シ

$$G_{\pm}^{\pm} \equiv G_{\pm}^{\pm}(\lambda) \equiv \delta \left\{ \frac{e^{\pm i\lambda x}}{x^{p+\frac{1}{2}}} (A_p(\lambda x) \pm i B_p(\lambda x)) \right\}$$

茲 =  $G_{\pm}^{\pm}$  ノ肩、 $\pm$  ハ  $e^{\pm i\lambda x}$  ノ符号  $\pm$  ト、肢、 $\pm$  ハ  $A_p(\lambda x) \pm B_p(\lambda x)$  ノ  $\pm$  ト一致スルモノトスル。又

$$H(\lambda, f) = H_+(\lambda, f) + H_-(\lambda, f)$$

但シ

$$H_{\pm}(\lambda, f) = \delta \left( \frac{\pm 1}{x^{\frac{1}{2}}} (A_p(\lambda x) \mp i B_p(\lambda x)) \int_x^{\omega} \xi^{p+\frac{1}{2}} e^{\pm i\lambda(\xi-x)} (A_p(\lambda \xi) \pm i B_p(\lambda \xi)) f(\xi) d\xi \right)$$

Birkhoff, Stone 等が常微分方程式ノ境界値問題ヲ用キテ *Asymptotic expansion* ヲ利用シタ方法ニ倣ヒ、次ノ如ク處理スル。今、 $\widetilde{Q}_r = \widetilde{Q}_r^{(4)} + \widetilde{Q}_r^{(u)}$  ト分ケル。茲ニ、 $\widetilde{Q}_r^{(i)}$  ハ第  $i$  象限ニ於テ  $\widetilde{Q}_r$  ノ部余デアル。  
( $i=1, 4$ )

1°.  $T_r$  ノ計算 第一並ニ第四象限ニ於テ、夫々

$$\text{條件(I)} \quad \frac{e^{-i\theta} G_-^+ - e^{i\theta} G_+^-}{e^{-i\theta} G_+^+ + e^{i\theta} G_-^-} = 1 + o(e^{\pm 2i\lambda})$$

ニテルヲウチ  $\{\widetilde{Q}_r\}$  ガ得ラレテキルト假定スル。

然ルトキニハ、第四象限ニ於テ

$$T_r^{(4)} = \frac{1}{2x^p} \int \lambda J_p(\lambda x) \left( \int_0^{\omega} \xi^{p+\frac{1}{2}} H_p^{(u)}(\lambda \xi) f(\xi) d\xi \right) d\lambda$$

$\widetilde{Q}_r^{(4)}$

第一象限ニ於テ

$$T_r^{(1)} = \frac{1}{2x^p} \int_{\tilde{C}_r^{(1)}} \lambda J_p(\lambda x) \left( \int_0^\omega \xi^{p+1} H_p^{(2)}(\lambda \xi) f(\xi) d\xi \right) d\lambda$$

ヲ考へレバ、コレト  $T_r$  トノ差ハ夫々ノ象限ヲ考へルトキ、任意ノ正数  $\eta =$  對シテ  $\eta \leq x \leq 1-\eta$  一様ニ零ニ *tend* スル。

曲線  $\tilde{C}_r^{(1)}$ ,  $\tilde{C}_r^{(2)}$  ノ積分ヲ、実軸、虚軸上ノ積分ニ直シ、茲ニ

$$H_p^{(1)}(e^{\pi i} z) = -e^{-p\pi i} H_p^{(2)}(z)$$

$$J_p(\lambda \xi) = \frac{H_p^{(1)}(\lambda \xi) + H_p^{(2)}(\lambda \xi)}{2}$$

$$J_p(e^{\pi i} z) = e^{ip\pi i} J_p(z)$$

ナル關係ヲ利用スレバ

$$T_r^{(1)} + T_r^{(2)} = \frac{1}{x^p} \int_0^{\rho_r} \lambda J_p(\lambda x) \left( \int_0^\omega \xi^{p+1} J_p(\lambda \xi) f(\xi) d\xi \right) d\lambda$$

ナル實軸上ノ積分ニ直ル。(但シ、 $\rho_r = \rho_r$  ハ  $\tilde{C}_r$  ト實軸トノ交ハリノ点ノ座標)

2°.  $U_r$  ノ處理  $\xi^p f(\xi)$  が  $(0, \omega)$  ナ *Lebesgue* 積分可能ナルコトカラ

$$\int_x^\omega \xi^{p+\frac{1}{2}} e^{\pm i\lambda(\xi-x)} (A_p(\lambda \xi) \pm i B_p(\lambda \xi)) f(\xi) d\xi$$

$$= E_\pm e^{\pm i\lambda(\omega-x)} + F_\pm$$

ト書カレ、茲ニ、 $|\lambda| \rightarrow \infty$  ノトキ、 $E_\pm, F_\pm \rightarrow 0$  ナアル。

従ツテ、 $\tilde{C}_r$  上ヲハ、 $H_+( \lambda, f )$  ガ、 $\tilde{C}_r$  上ヲハ、 $H_-( \lambda, f )$

が dominant である。

$$U_r = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^p} \int_{\tilde{C}_r^{(4)}} + \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^p} \int_{\tilde{C}_r^{(5)}}$$

$$= U_r^{(4)} + U_r^{(5)}$$

トオクトキ,  $U_r^{(4)}$  - 於テ dominant  $\neq 0$  入

$$\int_{\tilde{C}_r^{(4)}} \left| \frac{e^{i\lambda x} \delta\left(e^{i\lambda(\omega-x)} \frac{1}{x^{p+\frac{1}{2}}}\right)}{\delta\left(e^{i\lambda x} \frac{1}{x^{p+\frac{1}{2}}}\right)} \right| |d\lambda|$$

ノ常数倍である。コレガ  $r \rightarrow \infty$  = 對シテ有界 = ナレバ、  
シカモ、或ル範圍ヲ  $x$  = 關シテ一様 = 有界 = ナルコト  
ガ云ハレバ、 $U_r^{(4)}$  ハ  $r \rightarrow \infty$  = 對シテソノ範圍ノ  $x$  =  
關シテ一様 = 零 = ナル。

サテ、コノコトヲ云フ = ハ

$$\text{條件(II)} \left\{ \begin{array}{l} (1) \delta\left(e^{-i\lambda x} \frac{1}{x^{p+\frac{1}{2}}}\right) \text{ が第一象限ノ } \lambda = \text{關シテ} \\ \text{bounded. である。} \\ (2) \int_{\tilde{C}_r^{(4)}} \left| \frac{e^{i\lambda \delta}}{\delta\left(e^{i\lambda x} \frac{1}{x^{p+\frac{1}{2}}}\right)} \right| |d\lambda| = O(1) \end{array} \right.$$

(as  $r \rightarrow \infty$ )

ガ  $0 \leq \delta \leq \delta$  = テ成立スル  $\delta$  ヲ正數ト

並ビ =  $\{C_p\}$  が存在スル。

コノ二條件が満足サレテキルナラバ、 $0 \leq \omega + x \leq \delta$ ,

$\delta \leq x \leq \omega - \delta$  ヲ同時 = 満足スル  $x$  ノ閉區間 = 於イテ  $U_r^{(4)}$

ハ  $r \rightarrow \infty$  ト共 = 一様 = 零 = tend スル。



全ク同様ニシテ  $\mathcal{U}_r^{(4)}$  ㉔處理シタル。

10. 以上ノ結果ヲ多少整頓シテ述バルト次ノ如クナル。

定理1. §5ノ假定並ビニ規約ノモトニ於イテ、適當ニ選ンダ  $\{\tilde{\mathcal{C}}_r\}$  ㉔關シテ、次ノ條件ガ満足サレテキルトスル。

(I)  $0 \leq \delta \leq \delta + \epsilon$  ㉔如キ  $\delta$  ㉔關シテ  $r \rightarrow \infty$  ノトキ

$$\int_{\tilde{\mathcal{C}}_r^{(4)}} \left| \frac{e^{i\lambda\delta}}{\delta\left(\frac{e^{i\lambda x}}{x^{p+\frac{1}{2}}}\right)} \right| |d\lambda| = O(1)$$

$$\int_{\tilde{\mathcal{C}}_r^{(4)}} \left| \frac{e^{-i\lambda\delta}}{\delta\left(\frac{e^{-i\lambda x}}{x^{p+\frac{1}{2}}}\right)} \right| |d\lambda| = O(1)$$

㉔如キ正数  $\delta$  ガ存在スル。

$$(II) \frac{\delta(Y_p(\lambda x))}{\delta(J_p(\lambda x))} = 1 + O\left(e^{\mp i(1+\omega)\lambda x}\right)$$

但シ、 $\tilde{\mathcal{C}}_r^{(4)}$  ㉔對シテハ負号、 $\tilde{\mathcal{C}}_r^{(4)}$  ㉔對シテハ正号ヲ採用。

$$(III) \delta\left(\frac{e^{-i\lambda x}}{x^{p+\frac{1}{2}}}\right) = O(1)$$

$$\delta\left(\frac{e^{i\lambda x}}{x^{p+\frac{1}{2}}}\right) = O(1)$$

ガ夫々  $\tilde{\mathcal{C}}_r^{(4)}$ ,  $\tilde{\mathcal{C}}_r^{(4)}$  ㉔上テ  $r \rightarrow \infty$  ㉔對シテ成リ立ツ。

然ルトキニハ、任意ノ正数  $\eta$  ㉔對シテ  $\eta \leq x \leq \omega - \eta$  ㉔ニシテ且ツ  $0 < x + \omega \leq \delta + \epsilon$  ㉔如キ  $x$  ノ閉區間ニテ、 $x$  ㉔關シテ一樣ニ

$$S_p = \frac{1}{x^p} \int_0^{x^p} \lambda J_p(\lambda x) \left( \int_0^\infty \xi^{p+1} J_p(\lambda \xi) f(\xi) d\xi \right) d\lambda$$

ハ  $p \rightarrow \infty$  ト共 = 零 = 近ヅク。

コレ = 依ツテ問題ハ *Hankel* 積分ノ取扱ヒ = 帰着シヌ。  
然ル = *Hankel* 積分 = 関シテハ既 = 精細ナ収斂定理ガ知ラ  
レテキルカラ、イロイロナ形ノ収斂定理ヲ定理 / カラ得ラレ  
ルコト = ナル。

11. 以上、成ルベク一般ナ *linear fonctionnelle*  
 $\delta$  = ヲイテノ論ジマウトシタノデ、定理ノ形ハ相當煩雜トナ  
ツタ、収斂ヲ主張シテラヌノ区間モ亦狭メラレテキル。コ  
ウシタ道行キヲトツタノモスベテ、アトテ函数方程式ヲ論  
ズルトイフ目標ヲ第一 = シタタメデアアル。ソレデ、今、特 =  
*Fourier-Bessel* 級数 = 對應スルモノトシテ

$$(11.1) \quad \delta[f(x)] = f(b) \quad (b \text{ハ或常数})$$

ナル *linear fonctionnelle* ヲトルト、定理 / カラ得  
ラレルコトガ、從來知ラレテキル結果ヨリ狭イ。即チ高々、  
 $\eta \leq x \leq \frac{b}{2} - \eta$  デシカ収斂ガ主張サレナイ。(  $\eta$  ハ任意ノ正  
数 )

シカシナガラ、(11.1) トシテ *fonctionnelle*  $\delta$  ガ央  
ヘラレルトキ = ハ、 $U_p$  ノ処理ノ項ヲ眺ムト直チ = 分ルマウ  
ニ、定理 / ノ  $0 < x + \omega \leq \delta$  トイフ條件ハ  $0 < x \leq \delta$  デオ  
キカヘウルシ、又條件 (I) ノ  $\Delta$  トシテハ  $b$  ヨリ小ナル任意  
ノ正数ガヨイコトガワカル。ソレ故 = 、通常ノ定理ヲ導クノ  
ニ大シテ層ヲ折ラナクテ済ム。同様ナコトガ *Fourier-Dini*

ノ級数

$$(11.2) \quad \delta[f(x)] = (H+p)f(b) + b f'(b) \quad (\text{右ハ第1階数})$$

= ツイテ云ハレル。Schlömilch ノ級数 = 関シテハ、定  
理17 (同一ノ思想ノモトニ) 更ニ他種類ノ條件ノ加ヘテ精  
細ニシテカラ論ジタイ。