

512. 正則な g 曲線系 = 就イテ (I)

寺 阪 英 孝 (阪大)

至 ν 所正則な曲面上ノ測地線系ノ性質ヲ位相幾何學的ノ立場カラ考ヘテ見タイ。コノデハ簡單ノ ν 曲面ハ單一連結トスル。ソレ故位相的ニハ曲面ハ球面 S^2 トミナセシ。今 S 上ニアル次ノヨウナ g 曲線トソノ集合 \leftarrow 正則な g 曲線系 \rightarrow ナルモノヲ導入シ、ソレヨリ測地線ニ類似ノ性質ヲ出シテミタイ。

I. 連続性 g 曲線ハ直線 $-\infty < t < \infty$ ノ一意連続像 $g(t)$ デアル。

定義 $a \leq t \leq b$ = 對スル g 曲線ノ部分ヲ g 線分トイヒ、 $g(\overline{ab})$ 又ハ $g(\overline{ba})$ ヲ表ハス。 a, b = 對スル g 曲線上ノ点ガ x, y ナラバ、コレハ又 $g(\overline{xy})$ 又ハ $g(\overline{yx})$ ヲ表ハスコトモアル。 $a \leq t < \infty$ 又ハ $-\infty < t \leq a$ = 對スル曲線ノ部分ハ g 半曲線ト名ヅケテオク。

II. 局所一意可結性 S 上ノ任意ノ点 x 、任意ノ正數 $\alpha =$ 對シ $\alpha > \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ ナル $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ガ存在シテ、 $\overline{U(x, \varepsilon_2)}$ (x, ε_2 近傍ノ閉苞) ノ二点 y, z ハ $U(x, \varepsilon_1)$ = 含マレル g 線分 $g(\overline{yz})$ デ一意ニ結バレル。

定義 カノ近傍對 $\overline{U(x, \varepsilon_2)} \subset U(x, \varepsilon_1)$ ヲ半径 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ = 對スル正則近傍對、 $U(x, \varepsilon_2)$ ガケテ準正則近傍トイフ。

III. 一意接続性 ニツ、 g 線分 $g(\overline{xy}), g(\overline{x'y'})$

ガーツ, g 線分 $g(\overline{xy})$ が共有スレバ, $g(\overline{xy}) \subset g(\overline{xy'})$ ナルカ又ハ $g(\overline{xy}) \supset g(\overline{xy'})$ ナルカデア。

IV. 悉散性 g 曲線上, $t =$ 對スル点 $g(t)$ ハ t が連続的 $= t \rightarrow +\infty$ 又ハ $t \rightarrow -\infty$ トシタトキ, S 上ノ一点ニハ收斂シナイ。(即チ $t_n \rightarrow \infty, t'_n \rightarrow \infty, n=1, 2, \dots$ ナル數列ヲ $g(t_n) \rightarrow x, g(t'_n) \rightarrow x', x \neq x'$ ナルモノが存在スル。 $-\infty =$ ツイテモ同シ)

(注意) 閉曲線ハ悉散性ヲ有スルト云ヘルカラ, 閉 g 曲線ナルモ, ハ勿論除外シテキルワケデナク, 閉 g 曲線ガ常ニ存在スルトイフノガ結局証明シタイコトナノデア。

§ 1. I, II, III, IV カラ先ツ g 曲線ガ正則曲面上ノ測地線ト類シタ諸性質ヲ有ツコトヲ証明シテ見ヨウ。

定理 1 S 上ノ点 x ヲ通ル g 半曲線ハ x ヲ含ム準正則近傍ノ境界ト交ハル。(← I, II, IV)

(証) x ヨリ出ル g 半曲線 g' ヲ $0 \leq t < \infty$ ノ連続像 $g(t)$ デアルトシ, コレガーツノ準正則近傍 $U(z, \varepsilon_2) =$ 全ク含マレテキルト假定スル。悉散性ニヨリ $t_n \rightarrow \infty, t'_n \rightarrow \infty$ ($n=1, 2, \dots$) ナル數列ヲ, ソレニ對スル g' 上ノ点列 y_n, y'_n ガ $y_n \rightarrow y, y'_n \rightarrow y', y \neq y'$ ナルモノガアル。スルト假定ニヨリ $y \in \overline{U}(z, \varepsilon_2)$ ナル故

$\overline{U}(y, \delta_2) \subset U(y, \delta_1) \subset U(z, \varepsilon_1)$ 且 $\overline{U}(y, \delta_1) \cdot y' = 0$ ナル如キ y ノ正則近傍對 $U(y, \delta_2) \subset U(y, \delta_1)$ ガ存在スル。

N が十分大 = スレバ $n, n' > N =$ 對シテ $y_n, y_{n'} < U(x, \delta_2)$
 だカラ, $y_n, y_{n'}$ ハ $U(x, \delta_1)$ 内ヲ g 線分 = ヨリ 結ズル。

一方 y' ハ $\overline{U}(x, \delta_1)$ ト素チアルカラ 十分大 $+M =$ 對シテ
 $m > M$ ナラバ $y'_m \notin \overline{U}(x, \delta_1)$ デアル。

チテ $t_n \rightarrow \infty, t'_n \rightarrow \infty$ だカラ $n, n' > N, m > M$ ナ
 n, n', m デ $t_n < t'_m < t'_n + \epsilon$ 1 が必ズアル譯デアル
 が, ソウスレト $t_n, t'_n =$ 對スル g 線分 $g(\overline{y_n y'_n})$ ハ
 $\overline{U}(x, \delta_2)$ ノニ近 y_n, y'_n ヲトニカク $\overline{U}(x, \epsilon_2)$ 内ヲ結ンテ
 キルヲケテアルが, ソノ途中ニハ $t'_m =$ 對スル y'_m 即チ
 $\overline{U}(x, \delta_1)$ 外ノ点ヲ含ンテキルカラ, $g(\overline{y_n y'_n})$ ハ $U(x, \delta_1)$
 ニハ勿論含マレテキナイ。ソウスレバ y_n, y'_n ハイツレモ
 $U(x, \epsilon_2)$ ノ点デアルニカコハラズ $U(x, \epsilon_1)$ 内ヲ二通ニ結ズル
 レトナリ矛盾スル。

定理 2 g 曲線ハ 單一弧 (Jordanbogen) ノ連鎖
 カラナル。即チ $\sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i$ ($b_i \cdot b_{i+1}$ ハ一弧, b_i ハ單一弧)
 ノヨウニカケル。(← I, II, III)

(証) x ヲ通ル g 曲線ヲ $g(t)$ ($-\infty < t < \infty$) トシテハレレタ任意ノ数 $c =$ 對シ
 $x = g(c)$ トスレバ, $c \leq t < \infty$ 及ビ $-\infty < t \leq c =$ 對スル
 g 半曲線ハ 定理 1 = ヨリ x ノ 準正則近傍 $U(x, \epsilon_2)$ ノ境界
 ト交ハルカラ, x ヨリ出発シ初メテ $\dot{U}(x, \epsilon_2)$ ト交ハル点 =
 對スル t ノ値ヲ夫々 a, b トスレバ ($a < c < b$),
 $a \leq t \leq b =$ 對スル g 線分 $g(a, b)$ ハ 両端ヲ除キ $\subset U(x, \epsilon_2)$
 デアル。 $g(a, b)$ が單一弧デアルコトノ云ヒヌイノデアル
 が, ソノヌキニ先ツ $a \leq t_1 < t_2 \leq b$ ナル $t_1, t_2 =$ 就キ

$g(t_1) = g(t_2)$ ナラバ $t_1 \leq t \leq t_2$ ナルスマテノ $t =$ 對シテ
 $g(t) = g(t_1) = g(t_2)$ ナルコトヲ証明シヨウ。ソコデ
 モシソウデナイトシ、 $t_1 < t_3 < t_2$ ナル $t_3 =$ 對シテ
 $g(t_3) \neq g(t_1)$ トスレバ、 $g(t_3) = g(t)$ ヲ満足スル t ノ
 値デ (t_1, t_2) ノ間ニアルモノハ開集合ヲナスカラ、ソノ下
 端ヲ改メテ t_3 トスレバ確カニ $t_1 < t_3$ 、ソウスレバ更ニ
 $t_1 < t_4 < t_3$ ナル t_4 デ、 $g(t_4)$ ガ $g(t_1)$ トモ $g(t_3)$
 トモ異ナルモノガナケレバナラヌ。然ラバ $g(t_1, t_4)$ ト
 $g(t_4, t_2)$ トヲ考ヘレバ、兩者ハ $g(t_1) = g(t_2)$ ナル点
 ト $g(t_4)$ トヲ $\dot{U}(x, \varepsilon_2)$ 内デ結ブ線分デアルニカ、ハ
 ラズ、 $g(t_4, t_2)$ ハ $g(t_3)$ ヲ通り $g(t, t_4)$ ハ $g(t_3)$
 ヲ通ラヌカラ兩者ハ同一デナク、コレハ一意可結性ニ反
 スル。即チ $g(t_1) = g(t_2)$ ナラバスマテノ $t_1 \leq t \leq t_2 =$ ヅキ
 $g(t) = g(t_1)$ トナル。

ヨツテ同一点ヲ共ヘル t ノ集合ハ各 $a \leq t \leq b$ 上デ点
 又ハ線分ヲナスカラ、從ツテ $g(a, b)$ ハ確カニ單一デアル
 コトガ判ル。

任意ノ $t =$ 對シ $a < t < b$ ナル a, b ガ定マリ、
 $g(a, b)$ ハ單一弧ニナルノデアアルカラ、コレヨリ直チニ定
 理2ガ導ケル。(コノ証明ニハ定理1ヲツカツタガ、ナシデ
 エスル)

定理3 ニツノ g 曲線ハ共通点ニ於イテ互ニ交叉ス
 ル。(← I, II, III)

(証) g 曲線 g_1, g_2 ガエナル共通点ヲ有スルトシ、 x

ヲ含ム g_1, g_2 ノ g 線分ヲ夫々 S_1, S_2 トシ, x ノ任意ノ正則近傍對テ $U(x, \varepsilon_2) \subset U(x, \varepsilon_1)$ 。更ニ x カラ S_1, S_2 ノ兩端ニ至ル距離及ビ ε_2 ノ双方ヨリ小ナル半径 $\delta_1 > \delta_2$ ノ正則近傍對テ $U(x, \delta_2) \subset U(x, \delta_1)$ トスル。 x ヨリ出発シ最初ニ $\dot{U}(x, \delta_1) = \dot{U}(x, \delta_2)$ 交ハル S_1 及ビ S_2 ノ点ヲ夫々 y_1, z_1 及ビ y_2, z_2 トスレバ $g(\overline{y_1 z_1}) \subset S_1, g(\overline{y_2 z_2}) \subset S_2$ デアツテ且ツ $g(\overline{y_1 z_1})$ ト $g(\overline{y_2 z_2})$ トハ x 以外ニ共通点ハナイ (II ノ $U(x, \varepsilon_2)$ = オケル一意可結性ト III ノ一意接続性ニヨル)

ソコデ g_1, g_2 ガ x デ交叉シナイト云フノハ $\dot{U}(x, \delta_2)$ ノ上デ $(y_1, z_1), (y_2, z_2)$ ナル二組ノ点ガ互ニ他ヲ分クナイトイフコトハ同意義ト解釋シ, コノ假定カラ矛盾ヲ導キタイ。

ソレデ今 y_1 ト z_2 トガ y_2 ト z_1 トニヨリ分クレテキルト假定シ, $g(x y_1) \cdot U(x, \delta_2) \supset y', g(x z_2) \cdot U(x, \delta_2) \supset z'$ ナル二点 y', z' ヲ $U(x, \delta_1)$ 内デ g 線分 $g(\overline{y' z'}) = \dot{U}(x, \delta_1)$ 結ベバ, 假定ニヨリコレハ $g(\overline{y_1 z_1}), g(\overline{y_2 z_2})$ ノイヅレカニ y', z' 以外ノ点ヲ交ハラナケレバナラス。ドチラデモ同等ナル故 $g(\overline{y_1 z_1})$ トルナル点ヲ交ハツタトスレバ y', z' ハイヅレモ $\subset U(x, \delta_1)$ 。從ツテ $\subset U(x, \varepsilon_2)$ 。ヨツテ II, III ヨリ矛盾。——

定義 Jordan 曲線ヲ囲マレタ開面分 \overline{D} デ

$\overline{D} \supset x, y$ ナル二点 x, y ヲ兩端トスル g 線分 $g(\overline{xy})$

ガ唯レツ \overline{D} 内ニ存在スル如キモノヲ, 正則領域トイフ。

定理4 S , 任意ノ点 x = 對シ, x ヲ内点トスル正則領域が存在スル。特ニ三ツノ g 線分ヲ境界トスル正則領域ヲトルコトが出来ル。(← I, II, III, IV)

(証) x ノ一ツノ正則近傍對ノ半径ヲ $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, $\varepsilon_2 > \delta_1 > \delta_2$ ナル δ_1, δ_2 ヲ半径トスル正則近傍對ヲ $U(x, \delta_2) \subset U(x, \delta_1)$ トスレバ $\overline{U}(x, \delta_1) \subset U(x, \varepsilon_2)$ 故ニ $\overline{U}(x, \delta_1) \in$ 亦準正則近傍ト考ヘラレル。ヨツテ定理1ニヨリ $U(x, \delta_1)$ 内ノ点ヲ通ルルヲノ g 半曲線ハ $\dot{U}(x, \delta_1)$ ト交ハル。

ソコデ先ツ x ヲ通ル任意ノ g 曲線ヲ考ヘ, ソノ上ノ x ヲ含ム開 g 線分中 $U(x, \delta_1)$ = 含マレル最大ノモノヲ S トシ S 上デ x ノ両側 = $C U(x, \delta_2)$ + ルニ点 a, d ヲトル。 d ヲ通リ S ト異ナル g 線分ヲ取リ, ソレヲ双方ニ延長シテ初メテ $\dot{U}(x, \delta_1)$ ト交ハルマデノ部分ヲ S_1 , S_1 上デ d ノ両側 = $C U(x, \delta_2)$ + ルニ点 b, c ヲトツテ $g(\overline{ab}), g(\overline{ac})$ ヲ求メ, ソレヲ双方ニ延長シテ初メテ $\dot{U}(x, \delta_1)$ ト交ハル迄ノ部分ヲ夫々 S_2, S_3 トスル。 S, S_1, S_2, S_3 ハ凡ベテ準正則近傍 $U(x, \delta_1)$ ニ属スルカラ, 上記ノ a, b, c, d 以外ノ点デハ交ハラナイ。

$g(\overline{ab}), g(\overline{bc}), g(\overline{ca})$ ヲ圍マレタ面分ハ x ヲ含ム正則領域トルコトハ II, IIIノ性質ヨリ出ル。——

昭和11年7月—12月分、會費金貳円也別
便ノ振替用紙ニテ至急御拂込ニ下サシ。

大阪市北區

大阪帝國大學
理學部數學教室

清水辰次郎

振替口座番號

大阪一七七四三番