

510. 單葉冪級數ノ係數問題ニツイテ

城 憲 ≡ (阪大工)

(S)ヲ單位円 $|z| < 1$ ニ於ケル正則單葉函數

$$(1) f(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

ノ集合トスル。

本稿ハ(S)ノスベテノ函數ニ對シ $|a_n| \leq n$ ($n=2, 3, \dots$)ナルベシト云フ有名ナ Bieberbachノ Vermutungノ証明ヲ與フル一助トナルノデハナカラウカ。

K. Löwnerハ Math. Annalen 89, (1923), 101—121ニ於テ、係數 a_n ($n=2, 3, \dots$)ニ對スル徹底的ノ研究ヲナシタコトハ周知ノコトデアル。即チ彼ハ(S)ノスベテノ函數ハ $|z| < 1$ ヲ Schlitzbereich = abbilden スルマウナ函數ヲ近似出來ルコトヲ示シ (Carathéodoryノ定理ヲ用ヒテ), (S)ノ代リニ(S)ノ Unterklasseトナル Schlitzaabbildungヲナス函數ノミノ集合ヲ今(Sch)トスルナラバ, (Sch)ノスベテノ函數ニハ必ラズ $K(t)$ ($t \geq 0$)ナル絶對値ノナル連続函數が對應シ, コノ parameterノ函數 $K(t)$ ヲ用ヒテ a_n ($n=2, 3, \dots$)ノ

表示式ヲ得ルコト = 成功シタ。

K. Löwner ハ逆 =, 任意 = $K(\tau)$ ナル絶對値 1 ナル連続函数 (有限箇ノ不連続点ヲ有スルコトヲ得) = ハ又 (S) ノ函数ガ對應スルコトモ示シ、ソノ際應ナル函数ハ (Sch) = 屬スルトハ限ラヌト報シテキル。(Löwner, S. 119)

今又最近 = 到リ, J. Basilewitsch ハ論文: *Zum Koeffizientenproblem der schlichten Function*, *Recueil Mathématique*, 43, n° 2 (1936), 211-228 = 於テ K. Löwner ノ所論ヲ全ク別ノ方法即チ K. Löwner ノマウチカ學的ニ考ヘテ用ヒテ = (Löwner ハナル微分方程式ヨリ出テシタ), 純幾何學的ニ方法ヲ用ヒテ同シ理論ヲ再建シタ。Basilewitsch = 從ヘテ, Löwner ノ出テセル微分方程式 = 相當スル式ガ稍々異ナル形 = 於テ誘導サレリ*。

シカモコト = 表ハレテ来ル $K(\tau)$ ハ $(-\infty, 0)$ テ定義サレテキテ (コレハ本質的 = Löwner ト変リナイコトデアリ) $K(\tau) = e^{i\theta(\tau)}$ トオケバ, コノ $\theta(\tau)$ ノ意味ガ Löwner ノトシチガフマウデアリ。シカモ係數表示式ガ同シデアリ。Basilewitsch ハ (1) ヨリモ一般 = $\delta = 1, 2, \dots$ = 對シ

$$(2) f_S(z) = z + a_{\delta+1} z^{\delta+1} + \dots + a_{n\delta+1} z^{n\delta+1} + \dots$$

ヲ對稱トシテ、一般的ニ K. Löwner ノ係數表示式ヲ得タ。即チ

$$(3) a_{n\delta+1} = \sum (-1)^k A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}^{(S)} e^{-n\tau} \int_{-\infty}^{\tau_1} \int_{-\infty}^{\tau_2} \dots \int_{-\infty}^{\tau_{k-1}} e^{\sum_{\nu=1}^k \alpha_\nu \tau_\nu} \cdot \prod_{\nu=1}^k K(\tau_\nu) d\tau_\nu \dots d\tau_k$$

* Löwner, 様 = beschränkte schlichtabbildung ヲ用ヒナイカラ。

$$(-\infty < \tau_n \leq \tau_{n-1} \leq \dots \leq \tau_1 \leq t \leq 0)$$

$\gamma = \sum \alpha_n$ ハ $\sum \alpha_n = n + \nu$ スベテノ自然数 $\alpha_n =$ 對シテ行
 フ、又 $|K(\tau_n)| = 1$ デアリ $K(\tau_n) = e^{i\theta(\tau_n)}$ ハ $(-\infty, 0)$
 連続又ハ有限箇ノ不連続点ヲ有スル函数デアリ、

$$A_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{(S)} = \left(\frac{2}{S}\right)^n \cdot [(n - \alpha_1) \cdot S + 1] \cdot [(n - \alpha_1 - \alpha_2) \cdot S + 1] \dots [(n - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_n) \cdot S + 1]$$

デアル。

Basilewitch ハ K. Löwner ノ方法ヲ幾何學的ニ研究成功シタノハ賞讃サルベキハ勿論デアルガ、特ニ彼ノ研究ノヨイコトハ、彼ハ彼ノ意味ノ $K(\tau) = e^{i\theta(\tau)}$ ノ幾何學的意味ヲモ分明ナラシメタコトヲハナカラウカ、彼ノ研究ニヨリスベテノ (Sch) ノ函数ニハ上ノヤウナ $K(\tau) = e^{i\theta(\tau)}$ ナル函数ガ一ツ唯一ツ對應シ、又逆ニ集合 $\{\theta(\tau)\}$ ヲ連続又ハ有限箇ノ不連続点ヲ有スル $(-\infty, 0)$ デ定義サレタ函数 $\theta(\tau)$ ノ集リトシタトキニ、 $\{\theta(\tau)\}$ ヨリ一ツノ函数ヲ任意ニ取レバ、コレニ對シテ (Sch) ニ屬スル函数ガ對應セシメラレルコト、否モツト違フデソノ函数ノ近似表示ニモ成功シテアツタノデアル (Basilewitch 上記論文 §4 ノ最後参照)。コトニ到ツテ我々ハ次ノ重大ナ (Löwner ノ得ラレカッタ) 結論ニ達スル。

定理 ^{**} (Sch) ノスベテノ函数ニハ $(-\infty, 0)$ デ定

**) (S) ノ Unterklasse ノ星狀函数、凸函数ニハ單調函数ガ |對|ニ對應スルコトハ知ラレテキル、(Peschl, Stroganoff).

義サレタ連続又ハ有限箇ノ不連続点ヲ有スル函数 $\theta(z)$ ガ一ツ對應シ、 $K(z) = e^{i\theta(z)}$ トオケバ、係数ハ (3) = テ表示サレ (今ハ $\delta = 1$)、逆ニ上述ノ性質ヲ有スル $\theta(z)$ ヲ任意ニ與ヘルト、ソレニ應ジテ (Sch) ノ函数ガ一ツ (近似法ヲ) 作レル。

(注意) $\theta(z)$ ノ變レバソノ幾何學的意味カラ (Sch) ノ函数ニ變ヘル。ガカラ (Sch) ト $\{\theta(z)\}$ トハ一對一ノ關係ヲナス。

コノ著者ハ *Comptes Rendus*, 198, (1934), 1569 — 1571 ニ発表サレタ F. Marty, 論文: *Sur le module des coefficients de Mac Laurin d'une fonction univalente* ヲ想起セザルヲ得ナイ。

彼ガ言フマウニ、今モシ (S) ノ函数 (1) ノ係数 $|a_n|$ ($n = 2, 3, \dots$) ノ Maximum ヲ知ラントセバ (Sch) ノ函数ノミヲ考フレバ足リル (之ハ証明モ出來ル — Marty ノ論文定理 1 — シカシナガラ、K. Löwner ノマウニ *Schlitzaapproximation* ノ考ヘモアルカラ (Sch) ノ函数ノミヲ無條件ヲ考ヘルコトモ許サレテヨイ)、ソコデ (1) ノ係数 a_n ハ $|a_n|$ ノ Maximum = ナツテキルトスル。且ツ又 $a_n > 0$ ナアルト考ヘル、コレハ $|\varepsilon| = 1$ ヲ適當ニ選ンテ $f(z)$ ノ代リニ $\frac{1}{\varepsilon} f(\varepsilon z)$ ヲ考フレバソレヲ済ムコトナル。上ノマウニシタ後ニ、今度ハコノ $f(z)$ = 極メテ近い (S) ノ函数ヲ作ツテ見ル、コノ為メニ

$$\varphi(z) = f\left[\frac{e^{i\theta}(z+\alpha)}{1+\bar{\alpha}z}\right], \quad (\theta: \text{reelle}, |\alpha| < 1)$$

トオケバ, $\varphi(z)$ は $|z| < 1$ で *regulär schlicht* ナ

$$\psi(z) = \frac{\varphi(z) - \varphi(0)}{\varphi'(0)} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n z^n$$

ヲ作レバ之ハ (S) = 属スル. $\alpha \rightarrow 0$ ノトキハ $\psi \rightarrow e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z)$.

ソコデ α ヲ十分小ニトリ, $\alpha, \bar{\alpha}$ ヲ独立変数ノ如ク考ヘテ,

上ノ $\varphi(z)$ ヲ $\alpha, \bar{\alpha}$ ノ級数ニ展開シタトスル.

スルト

$$\varphi(z) = f[e^{i\theta} z] + \alpha f'[e^{i\theta} z] e^{i\theta} - \bar{\alpha} z^2 f''[e^{i\theta} z] e^{i\theta} + \dots,$$

且ツ

$$\varphi'(0) = e^{i\theta} (1 + \alpha \cdot 2a_2 e^{i\theta}) + o(\alpha).$$

依ツテ

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{a_n e^{in\theta} + \alpha(n+1)a_{n+1} e^{i(n+1)\theta} - \bar{\alpha}(n-1)a_{n-1} e^{i(n-1)\theta} + o(\alpha)}{e^{i\theta}(1 + \alpha \cdot 2a_2 e^{i\theta}) + o(\alpha)} \\ &= e^{i(n-1)\theta} \left\{ a_n + \alpha(n+1)a_{n+1} e^{i\theta} - \bar{\alpha}(n-1)a_{n-1} e^{-i\theta} + o(\alpha) \right\} \left\{ 1 - \alpha \cdot 2a_2 e^{i\theta} + o(\alpha) \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{A_n}{e^{i(n-1)\theta}} &= a_n + \alpha[(n+1)a_{n+1} - 2a_2 a_n] e^{i\theta} \\ &\quad - (n-1)a_{n-1} \bar{\alpha} e^{-i\theta} + o(\alpha). \end{aligned}$$

假定 = ヨリ $|A_n| < a_n$ ガ α, θ ノ値ニ拘ラズ成立シテケ
レバナラズ. θ ヲ $\theta = 0$ ノ近傍ニ任意ニ取リ $\alpha = r e^{i\omega}$

トオケル

$$\frac{A_n}{e^{i(n-1)\theta}} = a_n + r[(n+1)a_{n+1} - 2a_2 a_n] e^{i(\theta+\omega)}$$

$$-r(n-1)a_{n-1}e^{-i(\theta+\omega)} + o(r)$$

トナルが、之レヨリ假定 = ヲツテ

$$(4) \quad \frac{d}{dr} \Re \left[\frac{A_n}{e^{i(n-1)\theta}} \right]_{r=0} = 0$$

が $\theta = \text{無關係} = \text{成立スル}$ ことが必要ナル、(4)ヲ計算スルト、

$$a_{n+1} = x_{n+1} + iy_{n+1}, \quad a_{n-1} = x_{n-1} + iy_{n-1}$$

トオケバ、

$$(5) \quad \left\{ [(n+1)x_{n+1} - 2x_2 a_n] - (n-1)x_{n-1} \right\} \cos(\theta+\omega)$$

$$- \left\{ [(n+1)y_{n+1} - 2y_2 a_n] + (n-1)y_{n-1} \right\} \sin(\theta+\omega) = 0.$$

(5) が $\theta = \text{無關係} = \text{成立スル}$ タメニハ

$$(n+1)x_{n+1} - 2x_2 a_n = (n-1)x_{n-1},$$

$$(n+1)y_{n+1} - 2y_2 a_n = -(n-1)y_{n-1}.$$

即チ

$$(6) \quad (n+1)a_{n+1} - 2a_2 a_n = (n-1)\overline{a_{n-1}}.$$

(6)ハ $|a_n|$ ヲ Max. ナラシムル Grenzfunktion (1)ノ係數ノ満足スベキ必要ナ條件ナル。

コトニ於テ、シカシ $K(\tau) = -1$, $(-\infty, 0)$ ナル函數ヲ $\{K(\tau)\}$ 中ヨリ偶然持テ來ルナラバ、ソレハ $f(z) = \text{應ズル}$ $K(\tau)$ ソレ自身デハアルマイカ。何故ナラバ
コトキハ

$$(7) \quad a_n = n \quad (n=2, 3, \dots)$$

デアリ (6)ハ満足サレテキル。

附記

以上ハ K. Löwner, J. Basilewitch, 研究ヲ
読ンテノ筆者ノ感想ノ様ナモノデ、諸先輩ノ皆様ノ
御教ヲ賜リタイト思フ次第デアリマス。