503. 補解析集合ニ就テ

功力金二郎(北大)

補解析集合ニ関スル結果ヲ二三述ベテ見ヨウ.

§1. 次ノ定理1ハ将来モット良イ結果ニ応用サレ得ハシナイカト思ハレルが何分御教示願ヒタイ.

Souslin 図 $\{\mathbf{M}_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_k}\}$ ガ $\nu=(n_1, n_2, \cdots\cdots)$, $\nu'=(n_1', n_2', \cdots\cdots)$ $\nu \neq \nu'$ ナル限リ

$$\prod_{k=1}^{\infty} \mathbf{M}_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_k} \cdot \mathbf{M}^{HV}_{n_1', n_2', \cdots\cdots, n_k'} = 0$$

ナルトキ *système d'unicité* デアルト云ハレ集合族 $\mathfrak{M}$ カラ作リタル *système d'unicité*

$$\{\mathbf{M}_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_k}\} (\mathbf{M}_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_k} \in \mathfrak{M})$$

ノ核 $\mathbf{M} = \sum_{\nu} \prod_{k} \mathbf{M}_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_k}$ ヲ $\mathfrak{M}$ = $\mho$-*operation* ヲ施シテ得ラレタ集合デアルト云フ、カヽル集合ノ全体ヲ $\mathfrak{M}_{\mho}$ ヲ以テ示ス.

實数ノ開集合族ヲ $\mathfrak{F}$ ヲ以テ表ハストキ $\mathfrak{F}_{\mho}$ ハ *Borel* 集合族ト一致スル. 補解析集合族 $\mathfrak{F}_{AC}$ ハ *Borel* 族(即チ $\mathfrak{F}_{AC\sigma}=\mathfrak{F}_{AC}$ 及ビ $\mathfrak{F}_{AC\delta}=\mathfrak{F}_{AC}$) デアルケレドモ $\mathfrak{F}_{AC\mho}$ ハ $\mathfrak{F}_{AC}$ ト一致シナイ. 何トナレバ任意ノ解析集合ハ $\mathfrak{F}_{AC}$ = $\mho$-*operation* ヲ施シテ得ラレルカラデアル. コノコトヲ以下証明ショウ.

定理1. $\underline{\mathfrak{F}_{A} \leqq \mathfrak{F}_{AC\mho}}$.

証明. 今與ヘラレタル解析集合ヲ

$$A = \sum_{\nu} \prod_{K} F_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K} \; ; \; F_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K} \in \mathfrak{F}$$

トスル。一般性ヲ失ハズニ

$$F_{n_1, n_2, \cdots\cdots n_K} \supseteq F_{n_1, n_2, \cdots\cdots n_K, n_{K+1}} \quad (K=1,2,3,\cdots\cdots)$$

ト考ヘテモヨイ。

先ヅ次ノ *Lemma* ヲ考ヘテミル。

Lemma: 空間R＝於ケル與ヘラレタル集合族ヲ $\mathfrak{K}$ トシ, S ヲ *complete metric space* トスル。然ルトR×S ＝於ケル $(\mathfrak{K} \times \mathfrak{G})_{\sigma}$ ＝属スル集合ノRヘノ *uniform* ナ *projection* ハ $\mathfrak{K}_{\sigma}$ ＝属ス。(但シコヽニ $\mathfrak{G}$ ハS空間ノ開集合族ヲ示シ, $(\mathfrak{K} \times \mathfrak{G})_{\sigma}$ ハ次ノ形ヲ有スル集合ノ族ヲ示ス: $E = \sum_{\nu} \prod_{K} E_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K}$; $E_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K} = G_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K} \times H_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K}$; $G_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K} \in \mathfrak{K}$, $H_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K} \in \mathfrak{G}$ 且ツ $\{E_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K}\}$ ハ *Système d'unicité* デアルトスル)

Lemma ノ証明＝ツイテハ小著 *La théorie des ensembles analytiques et les espaces abstraits* (北大紀要第四巻) 定理6 及定理7参照。

他方デ吾々ハ, *Mazurkiewicz* ノ定理＝ヨリ x 軸上ノ解析集合A＝對シテ平面 OXY 上＝補解析集合Cが存在シAハCノ *uniform* ナ *projection* ＝ナルコトヲ知ツテヰル。

ヨツテ上ノ *Lemma* ＝於イテ R ヲ x 軸, S ヲ y 軸トシ, $\mathfrak{K} = \mathfrak{F}_{Ac}$ トオキ, C が $(\mathfrak{K} \times \mathfrak{G})_{\sigma}$ ＝属スルコトヲ証

明スレバ $A\in\mathfrak{K}_\sigma$ トナツテ吾々ノ目的ハ達セラレタコトニナル。

C ヲ求メルタメニ y 軸上ノ區間 $[0,1]$ 内ニ

$$\sigma_{n_1,n_2,\ldots\ldots,n_K}=[y_{n_1,n_2,\ldots\ldots,n_K},\ z_{n_1,n_2,\ldots\ldots,n_K}]$$

ナル小區間ヲ作ル。但シ $y_{n_1,n_2,\ldots\ldots,n_K}<z_{n_1,n_2,\ldots\ldots,n_K}<y_{n_1,n_2,\ldots\ldots,n_{K+1}}$; $y_{n_1,n_2,\ldots\ldots,n_K}\leqq y_{n_1,n_2,\ldots\ldots,n_K,n_{K+1}}$; $z_{n_1,n_2,\ldots\ldots,n_K}\geqq z_{n_1,n_2,\ldots\ldots,n_K,n_{K+1}}$ トスル。ソシテ

$$\mathfrak{M}_{n_1,n_2,\ldots\ldots,n_K}=F_{n_1,n_2,\ldots\ldots,n_K}\times\sigma_{n_1,n_2,\ldots\ldots,n_K};$$

$$\gamma_K=\sum_{n_1,n_2,\ldots,n_K}\mathfrak{M}_{n_1,n_2,\ldots\ldots,n_K};\qquad \gamma=\prod_{K=1}^{\infty}\gamma_K$$

トオク。スルト $A=\underset{R}{proj}\,\gamma$ デ且ツ A ノ各点 x ニツキ x ヲ通リ y 軸ニ平行ナ直線ト γ トノ共通部分ノ最下点ハ必ズ存在スル。ソノ全体ヲ $\gamma^{(m)}$ ヲ以テ表ハス。$\gamma^{(m)}$ ガ即チ *Mazurkiewicz* ノ集合 C デアル（*Lusin* 著 *Les ensembles analytiques* (1930) 282 頁参照。）

ヨツテ以下 $\gamma^{(m)}$ ガ $(\mathfrak{F}_{AC}\times\mathfrak{G})_\sigma$ トナルコトヲ示サウ。上記 γ ノ定義ニ於イテ y 軸ヲ $(0,1)$ 内ノ無理數又ハ *Baire* ノ零空間ト考ヘ $y_{n_1,n_2,\ldots\ldots,n_K}$ 及 $z_{n_1,n_2,\ldots\ldots,n_K}$ 等ハ凡ベテ有理數，$\sigma_{n_1,n_2,\ldots\ldots,n_K}$ ハ奇數 *order* ノ *Baire* ノ區間ノ或ルモノニ選ブコトが出來ル。サテ

$$\gamma^{(m)}=\gamma\cdot\{O\times Y-(\gamma-\gamma^{(m)})\}=\gamma\cdot\prod_r\{C\mathfrak{M}_r+C(P_r\times S)\}$$

但シ $\prod_r$ ハ凡テノ有理數 r ニツイテノ積デ

$$\mathfrak{M}_r=\gamma(R\times[y>r])$$

$$P_r=\underset{R}{proj}\{\gamma\cdot(R\times[y<r])\},$$

$[y>r]$ 及ビ $[y<r]$ ハ夫々 r ヨリ大ナル又ハ小ナル $(0,1)$ 内ノ無理数ノ全体ト考ヘル。Cハ例ノ通リ補集合ヲ示ス。（コノ計算ニツイテハ H. Hahn 著 *Reelle Funktionen, erster Teil* (1932) 383頁参照。

更ニ上式ヲ変形シテ

$$\gamma^{(m)} = \gamma \cdot \prod_{r} \left\{ CM_r + M_r\, C(P_r \times S) \right\}$$

$$= \gamma \cdot \prod_{r} \left[\left\{ C\gamma + \gamma[y<r] \right\} + M_r (CP_r \times S) \right]$$

コノ最後ノ式デ，高々可附番個ノ相素ナル集合ノ和ト云フ operation（ソレヲ s-operation ト云フコトニスル），及ビ高々可附番個ノ集合ノ積ナル operation（即チ δ-operation）ハ共ニ $\mathfrak{U}$-operation ノ一種デ $\mathfrak{M}_{\mathfrak{U}\mathfrak{U}} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{U}}$ デアルカラ，結局 γ 及ビ $C\gamma$ ガ $(\mathfrak{F}_{AC} \times \mathfrak{E})_{\mathfrak{U}}$ ニ属スレバヨイ、γ ノ方ハ上記ノ定義カラ明カニ之レニ属ス。$C\gamma$ ノ方ハ $\gamma_K \supset \gamma_{K+1}$ デアルカラ

$$C\gamma = C\gamma_1 + (\gamma_1 - \gamma_2) + (\gamma_2 - \gamma_3) + \cdots\cdots$$

γ_K ハ定義カラ $(\mathfrak{F} \times \mathfrak{E})_s$ ニ属ス。$C\gamma_K$ ノ方ハ

$$C\gamma_K = \prod_{n_1, n_2, \cdots, n_K} C(F_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K} \times \sigma_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K})$$

$$= \prod_{n_1, n_2, \cdots, n_K} \left\{ (F_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K} \times C\sigma_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K}) + (CF_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K} \times S) \right\}$$

$C\sigma_{n_1, n_2, \cdots\cdots, n_K}$ ハ閉集合デ、コノ式ノ中ノ和ハ相素ナル集合ノ和ダアルカラ $C\gamma_K$ ガ $(\mathfrak{F}_{AC} \times \mathfrak{E})_{\mathfrak{U}}$ ニ，従ッテマタ $C\gamma$ ガ之レニ属ス。

カクテ定理1ハ証明サレタ。

コノ定理カラ容易ニ次ノ系ヲ得ル。

系　解析集合ト補解析集合ニニツノ operation σ 及ビ δ ヲ可附番回施シテ得ラレル集合ハ、イヅレモ $\mathcal{F}_{AC\text{Ʊ}}$ ニ属ス。

§2. 凡テノ實數 x ニ對シテ定義セラレタ一價実函數 $y=f(x)$ ノ graph ヲ平面上ノ点集合トシテ、コレヲ曲線（courbe）ト名ヅケヨウ。曲線ガ補解析集合デアル場合ニツイテ N. Lusin ハ Mathematica vol X (1935) ニ Quelques remarques sur les courbes qui sont des complémentaires analytiques（70–80頁）ナル表題デ三，四ノ結果ヲ述ベテヰル。

コノ論文ノ中デ Lusin ハ上下ノ位置ニアルニツノ曲線（ニツノ曲線 C_1, C_2 ヲ graph トスルモトノ函數ヲ $f_1(x)$, $f_2(x)$ トスルトキ常ニ $f_1(x)<f_2(x)$ ナラバ C_1 ハ C_2 ノ下ニアリト云ヒ，マタ C_1 ト C_2 ハ上下ノ位置ニアリト云フ），ヲ Borel 集合デ分離スル仕方ニツイテ三ツノ定義ヲアゲテヰル。ソノ中第三ノ仕方ハ次ノ様デアル。

第三ノ定義：　上下ノ位置ニアルニツノ曲線 C_1, C_2 ニ對シテ平面 OXY 上ニ Borel 集合 E ガ存在シテ E ハ C_1 ト C_2 トノ間ニ位置シ E ノ x 軸ヘノ projection ガ x 軸全体ト一致スルトキ C_1, C_2 ハ「集合ニヨリ B 分離可能」(Séparable B au moyen d'un ensemble) ト云フ。

Lusin ハ第一ト第二ノ B 分離可能ノ定義ヲ與ヘタ後デハ夫々ソノ定義ニヨッテハ B 分離可能ニナラヌ，補解析集合デ且ツ上下ノ位置ニアル，曲線 C_1, C_2 ノ存在ヲ示シテヰル。

第三ノ定義ヲ與ヘタ後ニハ "Cette définition étant posée, on ne sait rien de la séparation des courbes qui sont des complémentaires analytiques, etc." ナル注意書キガシテアル。ヨッテコヽデハ次ノ定理ヲ証明シヨウ。

定理 2. 補解析集合デ且ツ上下ノ位置ニアル二ツノ曲線ニシテ「集合ニヨリ B 分離可能」ニナラヌモノガ存在スル。

証明： Borel 集合ナラザル解析集合 A ヲ x 軸ノ上ニトル。スルト x 軸ニ對スル A ノ補集合 CA ハ解析集合デハナイ。

スルト Mazurkiewicz ノ定理ニヨリ平面 OXY 上ニ補解析集合 C ガ存在シテ $A = \underset{OX}{proj.}\, C$ デ且ツコノ projection ガ uniform トナル。一般性ヲ失ハズニ C ハ $[y < -1]$ ナル半平面内ニ存在スルト考ヘルコトガ出來ル。A ノ各点 x ニ對シテ x ヲ通リ y 軸ニ平行ナ直線ハ C ト一ツ且ツ一ツノ点ニテ交ハルカラ、ソノ y 座標ヲ $p(x)$ ヲ以テ示スコトガ出來ル。

ソコデ $\quad f_1(x) = p(x) \quad$ 但シ $x \in A$ ナルトキ

$\qquad\quad f_1(x) = 0 \qquad$ 但シ $x \in CA$ ナルトキ

トオキ、且ツ $f_2(x) = f_1(x) + \frac{1}{4}$ トオカウ。 $f_1(x)$ ノ

graph ヲ C_1 トスルト $C_1 = C + CA$ デニツノ補解析集合ノ和トシテヤハリ補解析集合デアル。$f_2(x)$ ノ *graph* C_2 ハ C_1 カラ *translation* デ得ラレルカラ勿論ヤハリ補解析集合デアル。 $f_1(x) < f_2(x)$ デアルカラ C_1 ハ C_2 ノ下ニアル。

サテ C_1, C_2 ハ「集合トシテ B 分離可能」デナイ。何トナレバ若シ *Borel* 集合Eガ存在シテ上記ノ意味デ C_1, C_2 ヲ分離スルナラバ $y = -\frac{1}{2}$ ナル x 軸ニ平行ナ直線ヨリ上ニアルEノ部分即チ $E \cdot [y > -1]$ ハソノ x 軸ヘノ *projection* ガ CA ト一致セネバナラズ，且ツマタ他方デハ $E \cdot [y > -1]$ ハ *Borel* 集合デアルカラコノ *projection* ハ解析集合デナクテハナラヌ。之レ吾々ノ最初ノ假定ト矛盾スル。

之デ定理2ハ証明サレタノデアルガ函数 $f_1(x)$ ノ性質ヲモウ少シ詳シクシラベヨウ。

今、集合 C ハ前節ニ於ケルヤウニ *Borel* 集合 γ ノ最下点ノ集合 $\gamma^{(m)}$（y 軸ヲソノマヽ -2 ダケ下ヘ *translate* スル）。デアルトスル。

スルト $y = f_1(x)$ ハ *Kantorovitch-Kuratowski* ノ *fonction* CA ニナル（*Kuratowski* 著 *Topologie* I, 266 頁参照）

何トナレバ今 α ヲ任意ノ実数トスルトキ $[f_1(x) > \alpha]$ ハ $[f_1(x) \leq \alpha]$ ノ補集合デアル。 $\alpha \geq 0$ ナルトキ $[f_1(x) \leq \alpha]$ ハ x 軸ノ全体デアル。$\alpha < 0$ ナルトキ $[f_1(x) \leq \alpha]$ ハ $\gamma \cdot [y \leq \alpha]$ ノ x 軸ヘノ *projection* デアル、ヨツテ凡

テノ α ニツキ $[f_1(x) \leqq \alpha]$ ハ 解析集合デ $[f_1(x) > \alpha]$ ハ補解析集合デアル。即チ $y = f_1(x)$ ハ *fonction* CA デアル。

一般ニ *fonction* CA ノ *graph* ガ補解析集合デアル場合ニハソノ曲線ノ下ニアル部分 J ハ解析集合デアル、依ッテ

定理3. <u>曲線ノ下ノ部分 J ガ解析集合デ且ツ曲線自身ハ解析集合ナラザル補解析集合デアルモノガ存在スル</u>。

—— 以上 ——