501. 円，球ノ幾何

松村　宗治（台北大）

(I) 平面上ニ二円 $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ アリ、コノ交点ヲ通ル他ノ二円 $\mathfrak{z}, \mathfrak{w}$ ヲ此ノ平面上ニ考ヘル。

然ルトキハ

$$\sin \widehat{\mathfrak{x}\mathfrak{z}} = \frac{\sqrt{(\mathfrak{x}\mathfrak{x})(\lambda\mathfrak{x}+\mu\mathfrak{y},\lambda\mathfrak{x}+\mu\mathfrak{y})-\{\lambda(\mathfrak{x}\mathfrak{x})+\mu(\mathfrak{x}\mathfrak{y})\}^2}}{\sqrt{(\mathfrak{x}\mathfrak{x})}\sqrt{(\lambda\mathfrak{x}+\mu\mathfrak{y},\lambda\mathfrak{x}+\mu\mathfrak{y})}}$$

$$= \frac{\mu\sqrt{(\mathfrak{x}\mathfrak{x})(\mathfrak{y}\mathfrak{y})-(\mathfrak{x}\mathfrak{y})^2}}{\sqrt{(\mathfrak{x}\mathfrak{x})}\sqrt{\lambda^2(\mathfrak{x}\mathfrak{x})+2\lambda\mu(\mathfrak{x}\mathfrak{y})+\mu^2(\mathfrak{y}\mathfrak{y})}}$$

同様ニ

$$\sin \widehat{\mathfrak{y}\mathfrak{z}} = \frac{\lambda\sqrt{(\mathfrak{x}\mathfrak{x})(\mathfrak{y}\mathfrak{y})-(\mathfrak{x}\mathfrak{y})^2}}{\sqrt{(\mathfrak{y}\mathfrak{y})}\sqrt{\lambda^2(\mathfrak{x}\mathfrak{x})+2\lambda\mu(\mathfrak{x}\mathfrak{y})+\mu^2(\mathfrak{y}\mathfrak{y})}}$$

∴

$$\frac{\sin \widehat{\mathfrak{x}\mathfrak{z}}}{\sin \widehat{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}} = \frac{\mu}{\sqrt{(\mathfrak{x}\mathfrak{x})}} : \frac{\lambda}{\sqrt{(\mathfrak{y}\mathfrak{y})}} \quad \text{..........} (1)$$

コヽニ λ, μ ハ媒介変数デアル。

他ニ $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ ノ交点ヲ通ル $\mathfrak{w}$ ナル円ヲ考フレバ，同様ニ

$$\frac{\sin\widehat{\mathfrak{x}\mathfrak{w}}}{\sin\widehat{\mathfrak{y}\mathfrak{w}}}=\frac{\mu'}{\sqrt{(\mathfrak{x}\mathfrak{x})}}:\frac{\lambda'}{\sqrt{(\mathfrak{y}\mathfrak{y})}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

ガ成立ツ、λ', μ' ハ媒介変数デアル。

サテ今

$$\frac{\sin\widehat{\mathfrak{x}\mathfrak{z}}}{\sin\widehat{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}}:\frac{\sin\widehat{\mathfrak{x}\mathfrak{w}}}{\sin\widehat{\mathfrak{y}\mathfrak{w}}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

ヲ円 $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{w}$ ノ非調和比ト定メ、コレヲ $(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{w})$ ト記セバ (1), (2), (3) ヨリ

$$(\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}\mathfrak{w})=\frac{\mu}{\lambda}\cdot\frac{\lambda'}{\mu'}$$

トナリ此ノ四円ガ調和群ヲナストキ

$$\frac{\mu}{\lambda}\cdot\frac{\lambda'}{\mu'}=-1$$

即チ

$$\frac{\lambda'}{\mu'}+\frac{\lambda}{\mu}=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

ガ成立ツ。（非ユークリッド幾何ノ研究ニ於ケルト類似デアル）

別ニ $\overline{\mathfrak{w}}$ ガアッテ、上ノ性質ヲ満足セバ

$$\frac{\overline{\lambda}}{\overline{\mu}}+\frac{\lambda}{\mu}=0\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

ガ成立ツ。(4), (5) ヨリ

$$\frac{\lambda'}{\mu'}=\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\mu}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

トナル、コヽニ $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ ハ円 $\overline{\mathfrak{m}}$ ニ属スル媒介変数デアル。

(II) R_3 内ニ二円 $\mathfrak{K}$, $\bar{\mathfrak{K}}$ アリ、今 $\mathfrak{K}$ ヲ通ル球ガ $\bar{\mathfrak{K}}$ トナス角ヲ φ トセバ

$$\cos^2\varphi = T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ナルコトヲ吾々ハ先ニ見タ。尚コノ時

$$\sin^2\varphi = \left(A^{\alpha\beta}-T^{\alpha\beta}\right)\rho_\alpha\rho_\beta \quad \cdots\cdots (2)$$

ガ成立ツ。所ガ

$$e^{2i\varphi}=\frac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\varphi-i\sin\varphi}$$

$$=\frac{\sqrt{T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta}+i\sqrt{(A^{\alpha\beta}-T^{\alpha\beta})\rho_\alpha\rho_\beta}}{\sqrt{T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta}-i\sqrt{(A^{\alpha\beta}-T^{\alpha\beta})\rho_\alpha\rho_\beta}}$$

$$\therefore\quad \varphi=\frac{1}{2i}\log\left\{\frac{\sqrt{T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta}+i\sqrt{(A^{\alpha\beta}-T^{\alpha\beta})\rho_\alpha\rho_\beta}}{\sqrt{T^{\alpha\beta}\rho_\alpha\rho_\beta}-i\sqrt{(A^{\alpha\beta}-T^{\alpha\beta})\rho_\alpha\rho_\beta}}\right\}$$

(III) コヽデハ同平面内ノ円ヲ考ヘルコトニスル。二円 $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{y}$ ノ間ノ角ヲ ϕ トスレバ

$$\cos\phi=\frac{(\mathfrak{z}\mathfrak{y})}{\sqrt{(\mathfrak{z}\mathfrak{z})}\sqrt{(\mathfrak{y}\mathfrak{y})}},$$

$$\sin\phi=\frac{\sqrt{(\mathfrak{z}\mathfrak{z})(\mathfrak{y}\mathfrak{y})-(\mathfrak{z}\mathfrak{y})^2}}{\sqrt{(\mathfrak{z}\mathfrak{z})}\sqrt{(\mathfrak{y}\mathfrak{y})}}$$

故ニ $$e^{2i\phi}=\frac{\cos\phi+i\sin\phi}{\cos\phi-i\sin\phi}$$

$$
= \frac{(\mathfrak{z}\mathfrak{y}) + \sqrt{(\mathfrak{z}\mathfrak{y})^2 - (\mathfrak{z}\mathfrak{z})(\mathfrak{y}\mathfrak{y})}}{(\mathfrak{z}\mathfrak{y}) - \sqrt{(\mathfrak{z}\mathfrak{y})^2 - (\mathfrak{z}\mathfrak{z})(\mathfrak{y}\mathfrak{y})}}
$$

$$
\therefore \quad \phi = \frac{1}{2i} \log \left\{ \frac{(\mathfrak{z}\mathfrak{y}) + \sqrt{(\mathfrak{z}\mathfrak{y})^2 - (\mathfrak{z}\mathfrak{z})(\mathfrak{y}\mathfrak{y})}}{(\mathfrak{z}\mathfrak{y}) - \sqrt{(\mathfrak{z}\mathfrak{y})^2 - (\mathfrak{z}\mathfrak{z})(\mathfrak{y}\mathfrak{y})}} \right\}
$$